高二数学参考答案

第1天　集　合

1. (4)　**2.** 6　**3.** 0　**4.** $\{x|2<x<10\}$　**5.** $\left\{k|-1\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}\right\}$　**6.** $A=\{2,4,5\}$　**7.** $a=-1$　**8.** 26　**9.** $\left\{a|a\geqslant\frac{9}{8},或a=0\right\}$　**10.** -1.

11. 解:$B=\{2,3\}$,$C=\{-4,2\}$,而$A\cap B\neq\varnothing$,则2,3至少有一个元素在A中,又$A\cap C=\varnothing$,∴$2\notin A$,$3\in A$,即$9-3a+a^2-19=0$,得$a=5$或-2.而$a=5$时,$A=B$与$A\cap C=\varnothing$矛盾,∴$a=-2$.

12. 解:由$A\cap B=B$,得$B\subseteq A$,而$A=\{-4,0\}$,$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8$.当$\Delta=8a+8<0$,即$a<-1$时,$B=\varnothing$,符合$B\subseteq A$;当$\Delta=8a+8=0$,即$a=-1$时,$B=\{0\}$,符合$B\subseteq A$;当$\Delta=8a+8>0$,即$a>-1$时,$B$中有两个元素,而$B\subseteq A=\{-4,0\}$;∴$B=\{-4,0\}$,得$a=1$.∴$a=1$或$a\leqslant-1$.

13. 解:当$m+1>2m-1$,即$m<2$时,$B=\varnothing$,满足$B\subseteq A$,即$m<2$;当$m+1=2m-1$,即$m=2$时,$B=\{3\}$,满足$B\subseteq A$,即$m=2$;当$m+1<2m-1$,即$m>2$时,由$B\subseteq A$,得$\begin{cases}m+1\geqslant-2,\\2m-1\leqslant5,\end{cases}$即$2<m\leqslant3$;∴$m\leqslant3$.

14. $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant4\}$.$A\cap B=[2,4]$.则2是方程$x^2-(2m-3)x+m^2-3m=0$的根.代入得:$m^2-7m+10=0$,$m=2$或$m=5$.
$m=2$时,$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant2\}$.不合题意,舍去;
$m=5$时,$B=\{x|2<x\leqslant5\}$.符合题意.∴$m=5$.

第2天　函数概念与基本初等函数(1)

1. (4)　**2.** 0或1　**3.** $3\pi^2-4$　**4.** $x=\sqrt{3}$　**5.** 11　**6.** $(-\infty,-1)$　**7.** $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$　**8.** $-\frac{3}{4}$

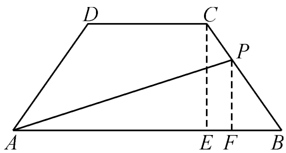
9. 2,5　**10.** 0

11. 解:$\Delta=4(m-1)^2-4(m+1)\geqslant0$,得$m\geqslant3$或$m\leqslant0$,$y=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(m-1)^2-2(m+1)=4m^2-10m+2$,∴$f(m)=4m^2-10m+2$,($m\leqslant0$或$m\geqslant3$).

12. 解:$f(ax+b)=(ax+b)^2+4(ax+b)+3=x^2+10x+24$,$a^2x^2+(2ab+4a)x+b^2+4b+3=x^2+10x+24$,
∴$\begin{cases}a^2=1,\\2ab+4a=10,\\b^2+4b+3=24,\end{cases}$得$\begin{cases}a=1,\\b=3,\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1,\\b=-7,\end{cases}$∴$5a-b=2$.

13. (1) $f(x)=x+2$,$g(x)=x^2-x-6$.
(2) $f(x)>g(x)+5\Rightarrow-1<x<3$,$y=\frac{g(x)+4}{f(x)}=\frac{x^2-x-2}{x+2}$.令$t=x+2$,则$y=t+\frac{4}{t}-5$,$(1<t<5)$,值域为$\left[-1,\frac{4}{5}\right)$.

14. 解:(1)过C点作$CE\perp AB$于E,在$\triangle BEC$中,$CE=\sqrt{5^2-3^2}=4$,∴$\sin B=\frac{4}{5}$.由题意,当$x\in(0,5]$时,过P点作$PF\perp AB$于F,



∴$PF=x\sin B=\frac{4}{5}x$,∴$S=\frac{1}{2}\times10\times\frac{4}{5}x=4x$,当$x\in(5,9]$时,∴$S=\frac{1}{2}\times10\times4=20$.当$x\in(9,14]$时,$AP=14-x$,$PF=AP\cdot\sin A=\frac{4(14-x)}{5}$,∴$S=\frac{1}{2}\times10\times(14-x)\times\frac{4}{5}=56-4x$.

综上可知,函数$S=f(x)=\begin{cases}4x, & x\in(0,5];\\20, & x\in(5,9];\\56-4x, & x\in(9,14].\end{cases}$

(2) 由(1)知,当$x\in(0,5]$时,$f(x)=4x$为增函数,所以,当$x=5$时,取得最大值20.当$x\in(5,9]$时,$f(x)=20$,最大值为20.当$x\in(9,14]$时,$f(x)=56-4x$为减函数,无最大值.综上可知:当P点在CD上时,$\triangle ABP$的面积S最大为20.

第3天　函数概念与基本初等函数(2)

1. $(-1,1)$　**2.** $[0,1)$　**3.** $[1,+\infty)\cup\{0\}$　**4.** $x\geqslant3$　**5.** $[-4,0)\cup(0,1)$　**6.** $\frac{1}{2}$　**7.** $\left[2,\frac{10}{3}\right]$　**8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. 3　**10.** $[4,+\infty)$　**11.** (2) $0\leqslant\sqrt{x}-2\leqslant1$,得$2\leqslant\sqrt{x}\leqslant3$,即$4\leqslant x\leqslant9$　(2) $0\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$

12. (1) 换元法(代数换元法):设$t=\sqrt{1-x}\geqslant0$,则$x=1-t^2$,原函数可化为$y=1-t^2+4t=-(t-2)^2+5(t\geqslant0)$
∴$y\leqslant5$　∴原函数值域为$(-\infty,5]$.
(2) 三角换元法:∵$1-x^2\geqslant0\Rightarrow-1\leqslant x\leqslant1$,
∴设$x=\cos\alpha$,$\alpha\in[0,\pi]$,则$y=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$,∴$\alpha\in[0,\pi]$.∴$\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5x}{a}\right]$则$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,∵$\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,\sqrt{2}]$,∴原函数的值域为$[-1,\sqrt{2}]$.

13. 解:原方程可化为$a=(2-2^{-|x-3|})^2-3$,令$t=2^{-|x-3|}$,则$0<t\leqslant1$,$a=f(t)=(t-2)^2-3$,
又∵$a=f(t)$在区间$(0,1]$上是减函数,∴$f(1)\leqslant f(t)<f(0)$,即$-2\leqslant f(t)<1$,故实数a的取值范围为:$-2\leqslant a<1$.

14. 解:(1) 由题设知:$3-x=\frac{k}{t+1}$,且$t=0$时,$x=1$,
∴$k=2$,即$x=3-\frac{2}{t+1}$,
∴年生产成本为$\left[32\left(3-\frac{2}{t+1}\right)+3\right]$万元,年收入为$150\%\left[32\left(3-\frac{2}{t+1}\right)+3\right]+\frac{1}{2}t$.
∴年利润:$y=\left\{150\%\left[32\left(3-\frac{2}{t+1}\right)+3\right]+\frac{1}{2}t\right\}-$

$\left[32\left(3-\frac{2}{t+1}\right)\right]-t(t\geqslant 0)$,

$\therefore y=\frac{-t^2+98t+35}{2(t+1)}(t\geqslant 0)$.

(2) 由(1)得：$y=\frac{-(t+1)^2+100(t+1)-64}{2(t+1)}=50-\left(\frac{t+1}{2}+\frac{32}{t+1}\right)\leqslant 50-2\sqrt{\frac{t+1}{2}\times\frac{32}{t+1}}=42$ 当且仅当$\frac{t+1}{2}=\frac{32}{t+1}$，即 $t=7$ 时，y 有最大值 42. ∴当促销费定为 7 万元时，2013 年该化妆品企业获得最大利润.

第 4 天　函数概念与基本初等函数(3)

1. $-\frac{5}{4}$　**2.** $y=-(x+2)(x-4)$　**3.** $[0,2]$　**4.** $\left[\frac{3}{2},3\right]$　**5.** $[-8,1]$　**6.** $\{-2\}$　**7.** $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

8. $y=x^2-x+1$　**9.** -3　**10.** $(-\infty,-3]$

11. 解：对称轴 $x=1$，$[1,3]$是 $f(x)$的递增区间，$f(x)_{\max}=f(3)=5$，即 $3a-b+3=5$，$f(x)_{\min}=f(1)=2$，即$-a-b+3=2$，$\therefore\begin{cases}3a-b=2,\\-a-b=-1.\end{cases}$ 得 $a=\frac{3}{4}$，$b=\frac{1}{4}$.

12. 解：$\because f(x)=-x^2+2ax+1-a$，开口向下，对称轴为 $x=a$，∴当 $a<0$ 时，$f(x)$在$[0,1]$上递减，$f(x)_{\max}=f(0)=1-a=2$，则 $a=-1$；当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，则 $f(x)_{\max}=f(a)=2$，得：$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或 $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(全部舍去)；当 $a>1$ 时，$f(x)$在$[0,1]$上递增，$f(x)_{\max}=f(1)=a=2$；综上所述：符合题意的 a 的值为 2 或-1.

13. 解：(1) 设旅行团的人数为 x，机票价格为 y 元，则：

$y=\begin{cases}900, & 1\leqslant x\leqslant 30,\\900-(x-30)\cdot 10, & 30<x\leqslant 70,\end{cases}$

即 $y=\begin{cases}900, & 1\leqslant x\leqslant 30,\\1\,200-10x, & 30<x\leqslant 70.\end{cases}$

(2) 设旅行社可获得利润为 Q 元，则：

$Q=\begin{cases}900x-15\,000, & 1\leqslant x\leqslant 30,\\-10x^2+1\,200x-15\,000, & 30<x\leqslant 70,\end{cases}$

当 $x\in[1,30]$时，$Q_{\max}=900\times 30-15\ 000=12\ 000$(元)；当 $x\in(30,70]$时，$Q=-10(x-60)^2+21\ 000$，$\therefore x=60$ 时，取 $Q_{\max}=21\ 000$(元)；∴当每团人数为 60 时，旅行社可获得最大利润 21 000 元.

14. 解：(1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2+|x|+1$ 为偶函数，当 $a\neq 0$ 时，$f(x)=x^2+|x-a|+1$ 为非奇非偶函数；

(2) 当 $x<a$ 时，$f(x)=x^2-x+a+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}$，当 $a>\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=a+\frac{3}{4}$，当 $a\leqslant\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}$不存在；当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)=x^2+x-a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-a+\frac{3}{4}$，当 $a>-\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}=f(a)=a^2+1$，当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-a+\frac{3}{4}$.

第 5 天　函数概念与基本初等函数(4)

1. $\frac{1}{9}$　**2.** -13　**3.** $c<b<a$　**4.** 1　**5.** $(4,+\infty)$

6. $(1,+\infty)$　**7.** -1　**8.** 4　**9.** $\left[1,\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right)$

10. $\left(0,\frac{1}{4}\right]$

11. (1) 解：原式$=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1-\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{3}{2}-1-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{2}$.

(2) 解：原式$=2\lg 5+2\lg 2+\lg 5\cdot(1+\lg 2)+\lg^2 2=2(\lg 5+\lg 2)+\lg 5+\lg 2(\lg 5+\lg 2)=2+\lg 5+\lg 2=3$.

12. (1) 设 $x<0$，则$-x>0$. $f(-x)=x^2+2x-3$.
又$\because f(x)$为偶函数，$\therefore f(x)=f(-x)=x^2+2x-3$.
$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2-2x-3, & x>0;\\-3, & x=0;\\x^2+2x-3, & x<0.\end{cases}$　(2) 图略.　(3) 由图：$f(x)$在$(-\infty,-1]$与$[0,1]$单调递减，在$[-1,0]$与$[1,+\infty)$上单调递增.

13. 解：(1) 当 $x<0$ 时，$f(x)=-\log_2(-x)$.
(2) 集合 $A=\left\{x\mid x\geqslant 4\text{ 或}-\frac{1}{4}\leqslant x<0\right\}$，$B=\left\{x\mid x\geqslant 4\text{ 或}-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0\right\}$，$A$ 是 B 的真子集.

14. 设剪成的小正三角形的边长为 x. 则
$S=\frac{(3-x)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{(3-x)^2}{1-x^2}\ (0<x<1)$.
利用导数法或换元法
$x=\frac{1}{3}$时，$S_{\min}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

第 6 天　立体几何初步(1)

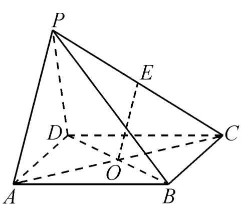
1. (2)(4)(5)　**2.** 命题(1)：由(1)(2)(3)⇒(4)；命题(2)：由(1)(2)(4)⇒(3)　**3.** (2)　**4.** 4　**5.** 必要不充分　**6.** 垂
7. 3　**8.** 线段 B_1C　**9.** (1)(4)　**10.** 12π

11. (1) $\because E$、F 分别是 AB、BD 的中点，$\therefore EF$ 是$\triangle ABD$ 的中位线，$\therefore EF\parallel AD$. 又$\because EF\not\subset$面 ACD，$AD\subset$面 ACD
∴直线 $EF\parallel$面 ACD.

(2) $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}EF\parallel AD\\AD\perp BD\end{array}\right\}\Rightarrow EF\perp BD\\\left.\begin{array}{r}CB=CD\\F\text{ 为 }BD\text{ 中点}\end{array}\right\}\Rightarrow CF\perp BD\\CF\cap EF=F\end{array}\right\}\Rightarrow$$

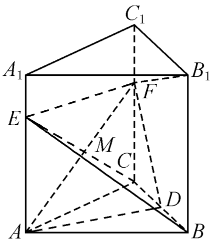
$$\left.\begin{array}{l}BD\perp\text{面 }CEF\\BD\subset\text{面 }BCD\end{array}\right\}\Rightarrow\text{面 }EFC\perp\text{面 }BCD$$

12. 证明：(1) 证法一：连接 AC. 因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 AC 过点 O，且 O 为 AC 的中点.



又因为点 E 为 PC 的中点，所以 $EO\parallel PA$. 因为 $PA\subset$平面 PAD，$EO\not\subset$平面 PAD，所以 $EO\parallel$面 PAD. (2) 因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $CD\perp AD$. 因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$CD\subset$平面 $ABCD$，所以 $CD\perp$平面 PAD. 又因为 $CD\subset$平面 PDC，所以平面 $PDC\perp$平面 PAD.

13. 证明：(1) $\because AB=AC$，D 为 BC 中点，$\therefore AD\perp BC$.
又在直三棱柱中，$BB_1\perp$底面 ABC，$AD\subset$底面 ABC，
$\therefore AD\perp BB_1$，$\therefore AD\perp$平面 BCC_1B_1，$\because B_1F\subset$平面 BCC_1B_1，$\therefore AD\perp B_1F$，在矩形 BCC_1B_1 中，$C_1F=CD=a$，$CF=C_1B_1=2a$，$\therefore\mathrm{Rt}\triangle DCF\cong\mathrm{Rt}\triangle FC_1B_1$.
$\therefore\angle CFD=\angle C_1B_1F$，$\therefore\angle B_1FD=90^\circ$，即 $B_1F\perp FD$.
$\because AD\cap FD=D$，$\therefore B_1F\perp$平面 AFD.



(2) 当 $AE=2a$ 时,BE∥平面 ADF. 证明:连 EF,EC,设 $EC\cap AF=M$,连 DM,∵$AE=CF=2a$,∴$AEFC$ 为矩形,∴M 为 EC 中点,∵D 为 BC 中点,∴MD∥BE,∵$MD\subset$平面 ADF,$BE\not\subset$平面 ADF,∴ BE∥平面 ADF.

第 7 天　立体几何初步(2)

1. (1)(4)　**2.** 垂直　**3.** ③　**4.** $8\sqrt{2}$　**5.** $2\sqrt{2}$　**6.** 2∶3

7. $\frac{\sqrt{6}}{3}a$　**8.** $\frac{1}{2}$　**9.** $BM\perp PC$　**10.** ②⑤

11. 因为 E、F 分别是 AP、AD 的中点. ∴EF∥PD. 又 $PD\subset$平面 PCD,$EF\not\subset$平面 PCD,∴直线 EF∥平面 PCD.
(2) 连接 BD. ∵$AB=AD$,$\angle BAD=60°$. ∴$\triangle ABD$ 为正三角形. F 是 AD 的中点,∴$BF\perp AD$. 又平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,∴$BF\perp$平面 PAD,$BF\subset$平面 BEF,∴平面 $BEF\perp$平面 PAD.

12. (1) 因为 E,F 分别是 A_1B,A_1C 的中点,所以 EF∥BC,又 $EF\not\subset$平面 ABC,$BC\subset$平面 ABC,∴EF∥平面 ABC;(2) 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$BB_2\perp$面 $A_1B_1C_1$,∵$A_1D\subset$平面 $A_1B_1C_1$,∴$BB_1\perp A_1D$. 又 $A_1D\perp B_1C$,$BB_1\cap B_1C=B_1$,∴$A_1D\perp BB_1C_1C$. 又 $A_1D\subset$面 A_1FD,所以平面 $A_1FD\perp$平面 BB_1C_1C.

13. 证明:(1) 连 AC,交 BD 于 O,连 EO. 因为 E 是 CC_1 的中点,所以 AC_1∥EO,$EO\subset$平面 BDE,AC_1 不在面 BDE 内,所以 AC_1∥面 BDE　(2) ∵$A_1A\perp BD$,$AC\perp BD$. $BD\perp$面 A_1ACC_1　又 $AC_1\subset$面 A_1ACC_1　∴$BD\perp AC_1$,同理 $AC_1\perp A_1B$,$AC_1\perp$面 A_1BD. 又由(1)知 AC_1∥EO　∴$EO\perp$面 A_1BD. 又 $EO\subset$平面 BDE. ∴面 A_1BD 面BDE　(3) 由(2)得 $A_1O\perp$平面 BDE 且
∴$A_1O=\frac{\sqrt{6}}{2}a$　$S_{\triangle BDE}=\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$　∴$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{4}a^3$

14. (1) 证明:E,P 分别为 AC、$A'C$ 的中点,EP∥$A'A$,又 $A'A\subset$平面 $AA'B$,$EP\not\subset$平面 $AA'B$,∴即 EP∥平面 $A'FB$. (2) 证明:∵ $BC\perp AC$,$EF\perp A'E$,EF∥BC,∴$BC\perp A'E$,∴$BC\perp$平面$A'EC$. 又 $BC\subset$平面 $A'BC$,∴平面 $A'BC\perp$平面 $A'EC$. (3) 证明:在$\triangle A'EC$ 中,P 为$A'C$ 的中点,∴$EP\perp A'C$,在$\triangle A'AC$ 中,EP∥$A'A$,∴$A'A\perp A'C$ 由(2)知:$BC\perp$平面 $A'EC$,又 $A'A\subset$平面 $A'EC$,∴$BC\perp AA'$. ∴$A'A\perp$平面 $A'BC$.

第 8 天　立体几何初步(3)

1. ①②　**2.** ①③　**3.** ②和④　**4.** $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

5. $12\pi\ \mathrm{cm}^3$　**6.** 196　**7.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　**8.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$　**9.** πS　**10.** $\frac{5}{6}$

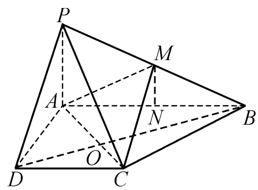
11. 设容器的高为 x. 则容器底面正三角形的边长为 $a-2\sqrt{3}x$,

$$\therefore V(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x\cdot(a-2\sqrt{3}x)^2\left(0<x<\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot 4\sqrt{3}x\cdot(a-2\sqrt{3}x)(a-2\sqrt{3}x)$$
$$\leqslant\frac{1}{16}\left(\frac{4\sqrt{3}x+a-2\sqrt{3}x+a-2\sqrt{3}x}{3}\right)^3=\frac{a^3}{54}.$$

当且仅当 $4\sqrt{3}x=a-2\sqrt{3}x$,即 $x=\frac{\sqrt{3}}{18}a$ 时,$V_{\max}=\frac{a^3}{54}$.

故当容器的高为$\frac{\sqrt{3}}{18}a$ 时,容器的容积最大,其最大容积为$\frac{a^3}{54}$.

12. (1) 证明:依题意知:$CD\perp AD$. 又∵面 $PAD\perp$面$ABCD$ ∴$DC\perp$平面 PAD. 又 $DC\subset$面 PCD,∴平面 $PAD\perp$平面 PCD.



(2) 由(1)知 $PA\perp$平面 $ABCD$,∴平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$. 在 PB 上取一点 M,作 $MN\perp AB$,则 $MN\perp$平面 $ABCD$,设 $MN=h$,则 $V_{M\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times h=\frac{h}{3}$,$V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PA=\frac{1}{3}\times\frac{(1+2)}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$,要使 $V_{PDCMA}:V_{MACB}=2:1$,即$\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{3}\right):\frac{h}{3}=2:1$,解得 $h=\frac{1}{2}$,即 M 为 PB 的中点.
(3) 连接 BD 交 AC 于 O,因为 AB∥CD,$AB=2$,$CD=1$,由相似三角形易得 $BO=2OD$,∴O 不是 BD 的中心,又∵M 为 PB 的中点,∴在$\triangle PBD$ 中,OM 与 PD 不平行,∴OM 所以直线与 PD 所在直线相交,又 $OM\subset$平面 AMC,∴直线 PD 与平面 AMC 不平行.

第 9 天　平面解析几何初步(1)

1. 90°,不存在　**2.** $4x-2y=5$　**3.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　**4.** $\sqrt{3}x+y-4\sqrt{3}=0$

5. $7x+24y+70=0$ 或 $7x+24y-80=0$　**6.** $k\geqslant2$ 或 $k\leqslant\frac{3}{4}$　**7.** -2　4　4　**8.** $(x-2)^2+(y-1)^2=10$

9. $\left(-\frac{1}{13},\frac{1}{13}\right)$　**10.** -1

11. 解:由$\begin{cases}2x+3y-5=0,\\3x-2y-3=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{19}{13},\\y=\frac{9}{13},\end{cases}$再设 $2x+y+c=0$,

则 $c=-\frac{47}{13}$,$2x+y-\frac{47}{13}=0$ 为所求.

12. 解:设所求直线 l 与两直线 l_1,l_2 分别交于$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+y_1=0$,又因为点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$分别在直线 l_1,l_2 上,则得$\begin{cases}4x_1+y_1+6=0,\\3x_2-5y_2-6=0,\end{cases}$即

$\begin{cases}4x_1+y_1+6=0,\\-3x_1+5y_1-6=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=-\frac{36}{23},\\y_1=\frac{6}{23},\end{cases}$所求直线 l 即为直线AP,所以 $y=-\frac{1}{6}x$ 为所求.

13. $(x-4)^2+(y-1)^2=25$.

14. (1) $(0,1)$,$(-2,1)$
(2) $(-13,13)$

第 10 天　平面解析几何初步(2)

1. 2　**2.** $\sqrt{14}$　**3.** 点 P 在圆外　**4.** 3　**5.** 4　**6.** 相交

7. 32 **8.** $-\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$ **9.** $\left(0,2-\frac{\pi}{2}\right]$ **10.** $2\sqrt{2}$

11. $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 或$(x+3)^2+(y+1)^2=9$.

12. $4x+3y+3=0$ 或 $3x+4y-3=0$.

13. 曲线化为$(x-6)^2+(y-6)^2=18$,其圆心到直线 $x+y-2=0$ 的距离为 $d=\frac{|6+6-2|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$. 所求的最小圆的圆心在直线 $y=x$ 上,其到直线的距离为$\sqrt{2}$,圆心坐标为$(2,2)$. 标准方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

14. (1) 设直线 l 的方程为:$y=k(x-4)$,即 $kx-y-4k=0$ 由垂径定理,得:圆心 C_1 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{4^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$,结合点到直线距离公式,得:$\frac{|-3k-1-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,化简得:$24k^2+7k=0$,$k=0$,或 $k=-\frac{7}{24}$. 故直线 l 的方程为:$y=0$ 或 $y=-\frac{7}{24}(x-4)$,即 $y=0$ 或 $7x+24y-28=0$ (2) 设点 P 坐标为(m,n),直线 l_1、l_2 的方程分别为:$y-n=k(x-m)$,$y-n=-\frac{1}{k}(x-m)$,即:$kx-y+n-km=0$,$-\frac{1}{k}x-y+n+\frac{1}{k}m=0$. 因为直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等,两圆半径相等. 由垂径定理,得圆心 C_1 到直线 l_1 与 C_2 直线 l_2 的距离相等. 故有:

$\frac{|-3k-1+n-km|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\left|-\frac{4}{k}-5+n+\frac{1}{k}m\right|}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}}$,化简得:

$(2-m-n)k=m-n-3$,或$(m-n+8)k=m+n-5$

关于 k 的方程有无穷多解,有:$\begin{cases}2-m-n=0,\\ m-n-3=0,\end{cases}$或 $\begin{cases}m-n+8=0,\\ m+n-5=0.\end{cases}$ 解之得:点 P 坐标为$\left(-\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$或$\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

第 11 天 平面解析几何初步(3)

1. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **2.** 24 **3.** $(-\infty,-1)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$ **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ **6.** $\frac{1}{2}$ **7.** $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ **8.** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ **9.** $(2,2)$

10. $y^2=-8x$;$x^2=y$

11. 解:设 $P(x_0,y_0)$,则 $y_0^2=2x_0$,

$\therefore d=\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-a)^2+2x_0}$
$=\sqrt{[x_0+(1-a)]^2+2a-1}$.

$\because a>0$,$x_2\geqslant0$,$\therefore$(1)当 $0<a<1$ 时,$1-a>0$,此时有 $x_0=0$ 时,$d_{\min}=\sqrt{(1-a)^2+2a-1}=a$.(2) 当 $a\geqslant1$ 时,$1-a\leqslant0$,此时有 $x_0=a-1$ 时,$d_{\min}=\sqrt{2a-1}$.

12. 解:由已知 $P\left(\frac{a^2}{c},y\right)$,所以 F_1P 的中点 Q 的坐标为 $\left(\frac{b^2}{2c},\frac{y}{2}\right)$,由 $k_{F_1P}=\frac{cy}{b^2}$,$k_{QF_2}=\frac{cy}{b^2-2c^2}$,$k_{F_1P}\cdot k_{QF_2}=-1$,$\Rightarrow y^2=2b^2-\frac{b^4}{c^2}$. $\therefore y^2=(a^2-c^2)\left(3-\frac{1}{e^2}\right)>0\Rightarrow\left(3-\frac{1}{e^2}\right)>0\Rightarrow\left(3-\frac{1}{e^2}\right)>0$,$1>e>\frac{\sqrt{3}}{3}$. 当 $k_{F_1P}=0$ 时,k_{QF_2} 不存在,此时 F_2 为中点,$\frac{a^2}{c}-c=2c\Rightarrow e=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 综上$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant e<1$.

13. 解:(1) 设椭圆 G 的方程为:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 半焦距为 c,则$\begin{cases}2a=12,\\ \frac{c}{a}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=6,\\ c=3\sqrt{3},\end{cases}$$\therefore b^2=a^2-c^2=36-27=9$,所求椭圆 G 的方程为:$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. (2) 点 A_k 的坐标为$(-k,2)$,$S_{\triangle A_KF_1F_2}=\frac{1}{2}\times F_1F_2\times2=\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times2=6\sqrt{3}$.

14. (1) $M(-2,0)$,$N(0,-\sqrt{2})$,M、N 中点$\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,此时 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$. (2) PA:$y=2x$,由$\begin{cases}y=2x,\\ x^2+2y^2=4,\end{cases}$得 $P\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$,$A\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$,$\therefore C\left(\frac{2}{3},0\right)$. AC:$x-y-\frac{2}{3}=0$. $d=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (3) $P(x_0,y_0)$,$A(-x_0,-y_0)$,$B(x_1,y_1)$,$C(x_0,0)$. $\because A$、C、B 三点共线,$\therefore k_{AC}=k_{AB}$,即$\frac{y_0}{2x_0}=\frac{y_1+y_0}{x_1+x_0}$,又$\because P$、$B$ 在椭圆上,$\therefore\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$,$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1$. 两式相减,$k_{PB}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=-\frac{x_0+x_1}{2(y_0+y_1)}$. $\therefore k_{PA}k_{PB}=\frac{y_0}{x_0}\left[-\frac{x_0+x_1}{2(y_0+y_1)}\right]=-\frac{(y_1+y_0)(x_0+x_1)}{(x_1+x_0)(y_0+y_1)}=-1$. $\therefore PA\perp PB$.

第 12 天 算法与统计(1)

1. 起止框 处理框 判断框 **2.** ② **3.** 20 **4.** 系统抽样

5. 6 16 **6.** 650 **7.** 3 **8.** 750 **9.** 甲 **10.** $a=34$

11. 解析 考查统计中的平均值与方差的运算. 甲班的方差较小,数据的平均值为 7,故方差

$s^2=\frac{(6-7)^2+0^2+0^2+(8-7)^2+0^2}{5}=\frac{2}{5}$

12. (1) 频率为 0.25,频数为 15 (2) 及格率为 75%
(3) 平均分约为 70.5.

第 13 天 算法与统计(2)

1. 6.42 **2.** 22 **3.** $a=10.5$ $b=10.5$ **4.** 80

5. 0060,0220 **6.** $\frac{16}{5}$

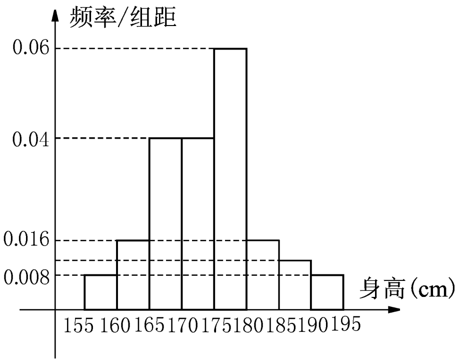
7. 解析:(1) 由茎叶图可知:甲班身高集中于 160~179 之间,而乙班身高集中于 170~180 之间. 因此乙班平均身高高于甲班;

(2) $\bar{x}=\frac{158+162+163+168+168+170+171+179+179+182}{10}=170$,甲班的样本方差为:$\frac{1}{10}[(158-170)^2+(162-170)^2+(163-170)^2+(168-170)^2+(168-170)^2+(170-170)^2+(171-170)^2+(179-170)^2+(179-170)^2+(182-170)^2]=57.2$. (3) 设身高为 176 cm 的同学被抽中的事件为 A;从乙班 10 名同学中抽中两名身高不低于 173 cm 的同学有:(181,173)(181,176)(181,178)(181,179)(179,173)(179,176)(179,178)(178,173)(178,176)(176,173)共 10 个基本事件,而事件 A 含有 4 个基本事件;$\therefore P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

8. (1) 由频率分布直方图知,前五组频率为$(0.008+0.16+0.04+0.04+0.06)\times5=0.82$,后三组频率为 $1-0.82=0.18$,人数为 $0.18\times50=9$ 人. 这所学校高三男生身高在 180 cm 以上(含 180 cm)的人数为 $800\times0.18=144$ 人.

(2) 由频率分布直方图得第八组频率为 $0.008\times5=0.04$,人数为 $0.04\times5=2$ 人,设第六组人数为 m,则第七组人数为 $9-2-m=7-m$,又 $m+2=2(7-m)$,所以 $m=4$,即第六组人数为 4 人,第七组人数为 3 人,频率分

别为 0.08,0.06 频率除以组距分别等于 0.016,0.012 见下图：



(3) 由(2)知身高在[180,185]内的人数为 4 人，设为 a，b，c，d. 身高在[190,195]的人数为 2 人，设为 A，B. 若 x，$y\in[180,185]$时，有 ab，ac，ad，bc，bd，cd 共六种情况. 若 x，$y\in[190,195]$时，有 AB 共一种情况. 若 x，y 分别在[180,185]，[190,195]内时，有 aA，bA，cA，dA，aB，bB，cB，dB 共 8 种情况所以基本事件的总数为 $6+8+1=15$ 种. 事件 $|x-y|\leqslant5$ 所包含的基本事件个数有 $6+1=7$ 种，故 $P(|x-y|\leqslant5)=\frac{7}{15}$.

第 14 天　概　率

1. $\frac{1}{2}$　**2.** $\frac{3}{5}$　**3.** $\frac{2}{5}$　**4.** $\frac{26}{27}$　**5.** $\frac{15-\pi}{12}$　**6.** $\frac{1}{3}$

7. ①③　**8.** $\frac{\pi}{4}$　**9.** $\frac{1}{3}$　**10.** $\frac{4}{9}$.

11. (1) 依据四条边长可得满足条件的三角形有三种情况：2、3、4 或 3、4、5 或 2、4、5，故 $P=\frac{3}{4}$　(2) 从 5 根竹竿中一次随机抽取 2 根的可能的事件总数为 10，它们的长度恰好相差 0.3 m 的事件数为 2，分别是：2.5 和 2.8，2.6 和 2.9，所求概率为 0.2.

12. (1) $\frac{1}{6}$　(2) $\frac{1}{4}$

13. 基本事件的全集为：{红红红，红红白，红白白，白红红，白红白，红白红，白白红，白白白}，共 8 个.　(1) 记"三次颜色恰好有两次相同"为事件 A：则 $P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$；　(2) 记"三次颜色全相同"为事件 B：$P(B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$；　(3) 记"三次抽取的红球多于白球"为事件 C：$P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$；　答(略)

14. (1) 先后 2 次抛掷一枚骰子，将得到的点数分别记为 a，b，事件总数为 $6\times6=36$. ∵直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切的充要条件是 $\frac{5}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$ 即：$a^2+b^2=25$，由于 $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}$，∴满足条件的情况只有 $a=3,b=4,c=5$；或 $a=4,b=3,c=5$ 两种情况. ∴直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切的概率是 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(2) 先后 2 次抛掷一枚骰子，将得到的点数分别记为 a，b，事件总数为 $6\times6=36$.

∵三角形的一边长为 5

∴当 $a=1$ 时，$b=5$，(1,5,5)　1 种

当 $a=2$ 时，$b=5$，(2,5,5)　1 种

当 $a=3$ 时，$b=3,5$，(3,3,5)，(3,5,5)　2 种

当 $a=4$ 时，$b=4,5$，(4,4,5)，(4,5,5)　2 种

当 $a=5$ 时，$b=1,2,3,4,5,6$，(5,1,5)，(5,2,5)，(5,3,5)，(5,4,5)，(5,5,5)，(5,6,5)　6 种

当 $a=6$ 时，$b=5,6$，(6,5,5)，(6,6,5)　2 种

故满足条件的不同情况共有 14 种.

答：三条线段能围成不同的等腰三角形的概率为 $\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$.

第 15 天　三角函数(1)

1. $\frac{4}{5}$　**2.** $\frac{3\pi}{4}$　**3.** 0 或 8　**4.** $\left\{\alpha\mid\alpha=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$

5. $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$　**6.** $\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 或 $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　**7.** $\left[-\frac{17}{8},1\right]$　**8.** 2　**9.** ①③　**10.** 1

11. 解：(1) $f(x)_{\max}=\sqrt{2}$，$T=2\pi$.　(2) $\frac{11}{6}$

12. 证明：左边 $=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x}+\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x}-\frac{1}{\tan^2x}=1+\frac{1}{\tan^2x}+\tan^2x+1-\frac{1}{\tan^2x}=2+\tan^2x=$ 右边.

13. 解：(1) ∵函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$，$\left(\frac{\pi}{3},1\right)$　∴$\begin{cases}\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=1\end{cases}$，　解得：$a=\sqrt{3}$，$b=-1$.

(2) 由(1)知：$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. 由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 递减区间为 $\left[2k\pi+\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(3) ∵$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，∴$x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，$g(x)=2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+m^2$，∴当 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，$g(x)_{\max}=3+m^2$，∴$3+m^2=4$，∴$m=\pm1$. 所以存在实数 $m=\pm1$，使 $g(x)$ 的最大值为 4.

第 16 天　三角函数(2)

1. ±3　**2.** $\sqrt{3}$　**3.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　**4.** $-\frac{23}{16}$　**5.** $\frac{3\pi}{4}$　**6.** $-\frac{5}{12}$

7. $\left[-\frac{11}{12},\frac{4}{3}\right]$　**8.** $[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$　**9.** $[6k-3,6k]$，$k\in\mathbf{Z}$　**10.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11. 解：∵$\sin x+\cos x=-\frac{1}{5}(0<x<\pi)$，故 $\cos x<0$.

两边平方得，$2\sin x\cos x=-\frac{24}{25}$.

∴$(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=\frac{49}{25}$.

而 $\sin x-\cos x>0$，∴$\sin x-\cos x=\frac{7}{5}$ 与 $\sin x+\cos x=-\frac{1}{5}$ 联立，解得 $\sin x=\frac{3}{5}$，$\cos x=-\frac{4}{5}$. ∴$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{3}{4}$.

12. (1) $y=-\sin^2x-\sin x+2=-\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$. ∵$x\in$

$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，∴ $\sin x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，∴ $y\in\left[0,\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right]$.

(2) $y=1-\frac{6}{\cos x+3}$. ∵ $2\leqslant\cos x+3\leqslant4$，

∴ $y\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$.

13. 解：(1) ∵ $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$，

∵ $b>0$，∴ $-b<0$，$\begin{cases}y_{\max}=b+a=\frac{3}{2}\\ y_{\min}=-b+a=-\frac{1}{2}\end{cases}$；

∴ $a=\frac{1}{2}$，$b=1$.

(2) 由(1)知：$g(x)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

∵ $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-1,1]$　∴ $g(x)\in[-2,2]$

∴ $g(x)$的最小值为-2

对应 x 的集合为$\left\{x\mid x=2k\pi+\frac{11}{6}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

14. 解：(1) 由 $\sin=\frac{3}{5}$　又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

∴ $\cos=\frac{4}{5}$，　$\tan=\frac{3}{4}$

∴ $\frac{2\sin^2\alpha+\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)}=6$

(2) $\tan\left(\alpha+\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{5}{4}\pi}{1-\tan\alpha\cdot\tan\frac{5}{4}\pi}$

$=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{\frac{3}{4}+1}{1-\frac{3}{4}}=7$

第 17 天　向量(1)

1. $4\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1$　**2.** $-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$　**3.** $\frac{1}{2}$　**4.** $6\sqrt{3}$　**5.** $\frac{1}{2}$

6. -2　**7.** $2\sqrt{3}a$　**8.** $(-2,11)$　**9.** $\frac{\pi}{2}$　**10.** $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$或$\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$

11. 解：(1) 由向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,\cos\alpha)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\cos\alpha,1)\cdot(-2,\sin\alpha)=0$. 即 $-2\cos\alpha+\sin\alpha=0$. 所以 $\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha$. 因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　所以 $\sin^2\alpha=\frac{4}{5}$. 因为 $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2) 由(1)可得 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan\alpha=2$.

$\tan2a=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$.

12. 解：(1) $(2,4)$或$(-2,-4)$　(2) $\frac{\pi}{2}$

13. (1) -6　(2) 120°　(3) $\sqrt{13}$

14. ∵ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2-(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2)}{2}=\frac{0-(9+16+25)}{2}=-25$

第 18 天　向量(2)

1. ±2　**2.** $(-4,-8)$　**3.** 6　**4.** $[2,10]$

5. $\left(-\frac{13}{3},-\frac{4}{3}\right)$　**6.** $\frac{2}{3}$　**7.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　**8.** $\left(\frac{15}{8},\frac{37}{12}\right)$

9. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　**10.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

11. 解：(1) 若点 A,B,C 能构成三角形，则这三点不共线，∴ $\overrightarrow{AB}=(3,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2-x,1-y)$，∴ $3(1-y)\neq2-x$ ∴ x,y 满足的条件为 $3y-x\neq1$(若根据点 A,B,C 能构成三角形，必须$|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|>|\overrightarrow{AC}|$，相应给分)；

(2) ∵ $\overrightarrow{AB}=(3,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-x-1,-y)$，若$\angle B$ 为直角，则$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，∴ $3(-x-1)-y=0$，又 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$，∴ $(x+1)^2+y^2=10$，再由 $y=3(-x-1)$，解得 $\begin{cases}x=0,\\y=-3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\y=3.\end{cases}$

12. 解：(1) 设 $P(x,y)$，则$(x,y)=(3t+1,3t+2)$

$t=-\frac{2}{3}$时，P 在 x 轴上；$t=-\frac{1}{3}$时，P 在 y 轴上；当 P 在第二象限时，$\begin{cases}3t+1<0,\\3t+2>0\end{cases}\Rightarrow-\frac{2}{3}<t<-\frac{1}{3}$.

(2) 若四边形 $OABP$ 为平行四边形，则$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}=(3,3)$，又$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+tAB$，即$(3,3)=(3t+1,3t+2)$，∴ $3t=2$，$3t=1$，矛盾；所以四边形 $OABP$ 不能为平行四边形.

13. (1) 设 $D(x,y)$，则由$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC},\\\overrightarrow{BD}/\!/\overrightarrow{BC},\end{cases}$可得 $D\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

(2) 设 $E(m,n)$，则 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，得 $AE=\frac{1}{3}AC$，从而$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $E(-4,3)$.

14. 证明：(1) ∵ $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos120^\circ-|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos120^\circ=0$，故$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$.　(2) 由$|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|>1$，即$|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2>1$，展开得 $k^2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}>1$. ①. ∵ $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}$. 故由①式得 $k^2-2k>0$，解得 $k<0$ 或 $k>2$.

第 19 天　三角恒等变换(1)

1. $\frac{1}{4}$　**2.** $\frac{59}{72}$　**3.** -1　**4.** $\sqrt{3}$　**5.** $-\frac{3}{4}$　**6.** $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$　**7.** $\frac{\pi}{4}$　**8.** $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2}{3}\pi$　**9.** 4　**10.** $-\frac{17\sqrt{2}}{26}$

11. 解：$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3},\\\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{5},\end{cases}$

∴ $\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\frac{4}{15},\\\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{15}.\end{cases}$

∴ $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=4$.

12. 解：(1) ∵ $2B=A+C$，∴ $B=\frac{\pi}{3}$，$A+C=\frac{2\pi}{3}$，$\tan(A+C)=\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=-\sqrt{3}$. ∴ $\tan A+\tan C-\sqrt{3}\tan A\tan C=-\sqrt{3}$　(2) $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$，

又 $0<A+B<\pi$，$A+B=\frac{\pi}{4}$. 故 $C=\pi-(A+B)=\frac{3\pi}{4}$.

13. 解：(1) ∵ $f(x)$为偶函数，∴ $\sin(-\omega x+\varphi)=\sin(\omega x+\varphi)$，

$\Rightarrow 2\sin\omega x\cos\varphi=1$ 恒成立，∴$\cos\varphi=0$，又 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，∴$\varphi=\frac{\pi}{2}$. 其图象上相邻的一个最高点和最低点之间的距离为 $\sqrt{4+\pi^2}$，设其最小正周期为 T，则 $\frac{T}{2}=\sqrt{4+\pi^2-2^2}=\pi$，∴$T=2\pi$∴$\omega=1$，∴$f(x)=\cos x$.

(2) ∵ 原式 $=\frac{\sin2\alpha-\cos2\alpha+1}{1+\tan\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=2\sin\alpha\cos\alpha$，又 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$，∴$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$，∴$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{5}{18}$，∴原式 $=-\frac{5}{18}$.

14. 解：(1) $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，∵$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$，∴$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.

(2) ∵$(2a-c)\cos B=b\cos C$，由正弦定理，得 $(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$. ∴$2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$，∴$2\sin A\cos B=\sin(B+C)$. ∵$A+B+C=\pi$，∴$\sin(B+C)=\sin A\neq0$，∴$\cos B=\frac{1}{2}$，$B=\frac{\pi}{3}$. ∴$0<A<\frac{2\pi}{3}$，∴$\frac{\pi}{6}<\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，$\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. 又∵$f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，∴$f(A)=\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$. 故函数 $f(A)$ 的取值范围是 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

第 20 天　三角恒等变换(2)

1. $\frac{1}{2}$　**2.** $\frac{\pi}{3}$　**3.** $\frac{24}{25}$　**4.** 1　**5.** $\frac{1}{3}$　**6.** $\frac{2}{5}$

7. 2 010　**8.** 2　**9.** 3　**10.** -1

11. 解：(1) $f(x)=\cos2x\cdot\frac{1}{2}+\sin2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

∴$T=\pi$.

对称轴方程 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

(2) $g(x)=\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

当 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ 时，$g(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$；

当 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$ 时，$g(x)_{\max}=2$.

∴$g(x)\in\left[-\frac{1}{4},2\right]$.

12. 解：(1) $|\boldsymbol{a}|^2=2\cos^2\frac{A+B}{2}+\sin^2\frac{A-B}{2}=\frac{3}{2}$，$1+\cos(A+B)+\frac{1-\cos(A-B)}{2}=\frac{3}{2}$，$\cos A\cos B-\sin A\sin B-\frac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{2}=0$，$\frac{1}{2}-\frac{3\tan A\tan B}{2}=0$，$\tan A\tan B=\frac{1}{3}$(定值).

(2) 由(1)可知 A、B 为锐角 $\tan C=-\tan(B+A)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{3(\tan A+\tan B)}{2}\leqslant-3\sqrt{\tan A\tan B}=-\sqrt{3}$，所以 $\tan C$ 的最大值为 $-\sqrt{3}$，此时三角形 ABC 为钝角三角形.

13. 解：(1) ∵$f(x)=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sin2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x=\sqrt{3}-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，∴函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 单调增区间满足：$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即单调增区间为：$\left[k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2) ∵$f(x)=\sqrt{3}-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$，可化为：$\sqrt{3}-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$.

∴$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$. ∵$\alpha\in(0,\pi)$，∴$\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，$\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$. ∴$\alpha=\frac{5\pi}{6}$. ∴$\sin\alpha=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$.　法二：$\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$(以下略).

(3) ∵$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，∴$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$.

∴$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，$-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$. $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}+1$

14. 解：(1) $1+2\sin B\cos B=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，待 $2\sin B\cdot\cos B=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$. 由 $\sin B+\cos B>0$，且 B 为 $\triangle ABC$ 的内角，∴$B\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，$2B\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$. 再由 $\sin2B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $2B=\frac{4\pi}{3}$，∴$B=\frac{2\pi}{3}$.

(2) $\tan(A+C)=\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}$，即 $\frac{3-\sqrt{3}}{1-\tan A\tan C}=\sqrt{3}$，$\tan A\tan C=2-\sqrt{3}$，结合 $\tan A+\tan C=3-\sqrt{3}$，得 $\tan A$，$\tan C$ 是方程 $x^2-(3-\sqrt{3})x+2-\sqrt{3}=0$ 的两根. 得 $\begin{cases}\tan A=2-\sqrt{3},\\ \tan C=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\tan A=1,\\ \tan C=2-\sqrt{3},\end{cases}$

∵$\angle A>\angle C$，∴$\tan A>\tan C$. ∴$\tan A=1$.

又 $A\in(0,\pi)$，∴$A=\frac{\pi}{4}$.

第 21 天　解三角形

1. 7　**2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{4}$　**3.** 9　**4.** $-\frac{11}{24}$　**5.** $1:\sqrt{3}:2$　**6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 一　**8.** $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$　**9.** $\frac{2\sqrt{39}}{3}$　**10.** $\sqrt{11}$

11. 锐角 $\triangle ABC$ 中，$0<A$、B、$C<\frac{\pi}{2}$，又 $A=2B$，∴ $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\ 0<2B<\frac{\pi}{2}\\ 0<\pi-3B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，∴$B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$. ∴$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin2B}{\sin B}=2\cos B\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$，故 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

12. 解:(1) 在$\triangle ABC$中,$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$,且$b^2+c^2=a^2+bc$. ∴$\cos A=\frac{1}{2}$,又$A\in(0,\pi)$,所以$A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由正弦定理,又$\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$,故$\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}=\frac{c^2}{4R^2}$,即:$a^2+b^2=c^2$,故$\triangle ABC$是以$\angle C$为直角的直角三角形. 又∵$A=\frac{\pi}{3}$,∴$B=\frac{\pi}{6}$.

13. (1) ∵$C=\pi-(A+B)$,$\tan A=\frac{1}{4}$,∴$\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}}=-1$. 又∵$0<C<\pi$,∴$C=\frac{3}{4}\pi$;

(2) ∵$C=\frac{3}{4}\pi$,∴AB边最大,即$AB=\sqrt{17}$. 又∵$\tan A<\tan B$,$A,B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,∴角$A$最小,$BC$边为最小边. ∵$\cos A=\frac{4\sqrt{17}}{17}$,$\sin A=\frac{\sqrt{17}}{17}$. 由$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$得:$BC=AB\cdot\frac{\sin A}{\sin C}=\sqrt{2}$,所以,最小边$BC=\sqrt{2}$.

14. (1) ∵$z_1=z_2$,∴$b\cos C=(2a-c)\cos B$,① $a+c=4$,② 由①得$2a\cos B=b\cos C+c\cos B$,③ 在$\triangle ABC$中,由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,设$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k(k>0)$.
则$a=k\sin A$,$b=k\sin B$,$c=k\sin C$
代入③得 $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B$.
$2\sin A\cos B=\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$.
∵$0<A<\pi$,∴$\sin A>0$,∴$\cos B=\frac{1}{2}$,
∵$0<B<\pi$,∴$B=\frac{\pi}{3}$.

(2) ∵$b=2\sqrt{2}$,由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,$a^2+c^2-ac=8$,④ 由②得$a^2+c^2+2ac=16$ ⑤ 由④⑤得$ac=\frac{8}{3}$,∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

第 22 天 数列(1)

1. $-\frac{17}{19}$ **2.** 84 **3.** 75 **4.** 45 **5.** $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$

6. $\frac{2}{n+1}$ **7.** 4 012 **8.** $S_{100}=10\ 100$ **9.** 299 **10.** 158

11. (1) $a_n=\frac{2n-1}{2^{n+1}}$ (2) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n(n+2)}$ (3) $a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2n}$

12. (1) $a_n=4n-5$ (2) $a_n=\begin{cases}4, & n=1;\\ 2\times3^{n-1}, & n\geqslant2.\end{cases}$

13. 解:(1) 易求得$a_n=2n$.
(2) 由(1)得$b_n=2nx^n$,令$s_n=2x+4x^2+6x^3+\cdots+2nx^n$(*),则$xs_n=2x^2+4x^3+\cdots+2(n-1)x^n+2nx^{n+1}$(**),用(*)减去(**).(注意错过一位再相减),得$(1-x)s_n=2x+2x^2+2x^3+\cdots+2x^n-2nx^{n+1}$,当$x\neq1$时,$s_n=\frac{2}{1-x}\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x}-nx^{n+1}\right]$;当$x=1$时$s_n=2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$,综上可得:当$x\neq1$时$s_n=\frac{2}{1-x}\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x}-nx^{n+1}\right]$;当$x=1$时$s_n=2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$.

14. (1) $a_2=\frac{3}{2}$,$a_3=\frac{9}{4}$. ∵$2a_{n+1}=S_n+2$,∴$2a_n=S_{n-1}+2(n\geqslant2)$,两式相减,得$2a_{n+1}-2a_n=S_n-S_{n-1}=a_n$,∴$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n(n\geqslant2)$. 又$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{2}$,$a_1\neq0$ ∴$\{a_n\}$为等比数列,$a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

(2) $\frac{3}{a_n}=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,∴$\left\{\frac{3}{a_n}\right\}$是首项为3,公比为$\frac{2}{3}$的等比数列. $\sum_{I=1}^{N}\frac{3}{a_i}>S_n\Rightarrow2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n+9\times\left(\frac{2}{3}\right)^n<11$. ∴$1<\left(\frac{3}{2}\right)^n<\frac{9}{2}$.……(*) 当$n=1,2,3$时,(*)式成立; 当$n\geqslant4$时,$\left(\frac{3}{2}\right)^n\geqslant\frac{81}{16}>\frac{9}{2}$,(*)式不成立. ∴不等式解集为$\{1,2,3\}$.

第 23 天 数列(2)

1. -1 **2.** -1 **3.** $a_n=\frac{1}{3^n}$ **4.** $\frac{1}{3}$或1 **5.** 3 421

6. 2 006 **7.** 15 **8.** 14 **9.** 11 **10.** $a_n=\begin{cases}1(n=1)\\ \frac{n!}{2}(n\geqslant2)\end{cases}$

11. 解:易知$a_4=4$,$a_3\cdot a_5=(a_4-d)(a_4+d)=16-d^2=7$,∴$d=\pm3$. 若$d=3$,$a_8=16$. 若$d=-3$,$a_8=-8$.

12. 设公差为d,$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{m-n}{n-m}=-1$,$a_{m+n}=a_m+nd=n+n(-1)=0$.

13. (1) $d=\frac{a_{11}-a_3}{11-3}=-\frac{1}{2}$,$a_{51}=a_{11}+40d=-17$. $a_{51}+a_{52}+\cdots+a_{80}=30a_{51}+\frac{30\times29}{2}d=-\frac{1\ 455}{2}$ (2) $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{33n-n^2}{4}=-\frac{1}{4}\left(n-\frac{33}{2}\right)^2+\frac{33^2}{16}$.
∵$n\in\mathbf{N}^*$,∴当$n=16$或17时,S_n取得最大值为$S_{16}=S_{17}=68$.

14. 解:∵$S_9=9a_5$,$a_5=2$,$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{a_5+a_{n-4}}{2}\cdot n=\frac{2+30}{2}\cdot n=16n=240$. ∴$n=15$.

第 24 天 数列(3)

1. 2 **2.** 42 **3.** 100 **4.** $\frac{15}{2}$ **5.** 63 **6.** $\frac{1}{3n-2}$ **7.** 9

8. $\frac{18}{31}$ **9.** $-2\ 010$ **10.** $\left(-\frac{1}{9},-\frac{1}{17}\right)$

11. 解:设$\{a_n\}$的公差为d,由$\begin{cases}S_5=5a+\frac{5\times4}{2}d=5,\\ S_{11}=11a_1+\frac{11\times10}{2}d=77,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=-3,\\ d=2.\end{cases}$从而

$S_n=-3n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-4n$,∴$\frac{S_n}{n}=n-4$. ∴$T_n=\frac{-3+n-4}{2}\times n=\frac{n^2-7n}{2}$.

12. 解:(1) 由条件,$S_n^2=3+(n-1)\cdot1=n+2$,$S_n=\sqrt{n+2}$. 当$n=1$时,$a_1=S_1=\sqrt{3}$;当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$;
∴$a_n=\begin{cases}\sqrt{3}, n=1\\ \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}, n\geqslant2\end{cases}$.
(2) 当$n\geqslant2$时,$a_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=$

$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$随 n 的增大逐渐减小. 又 $a_2=2-\sqrt{3}<\sqrt{3}=a_1$,所以数列$\{a_n\}$是递减数列.

13. 解:(1) ∵$A_2=5,B_2=-1$,∴$\begin{cases}a_1^2+a_1^2q^2=5,\\a_1-a_1q=-1,\end{cases}$

∴$\begin{cases}a_1=-2,\\q=\frac{1}{2},\end{cases}$ 或$\begin{cases}a_1=1,\\q=2.\end{cases}$ ∴$a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$,或 $a_n=2^{n-1}$.

(2) ∵$\frac{a_{n+1}{}^2}{a_n^2}=\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=q^2=$常数,

$\frac{(-1)^{n+2}a_{n+1}}{(-1)^{n+1}a_n}=(-1)\times\frac{a_{n+1}}{a_n}=-q=$常数,

∴数列$\{a_n^2\}$,$\{(-1)^{n+1}a_n\}$均为等比数列,首项分别为a_1^2,a_1,公比分别为$q^2,-q$. 当 n 为奇数时,当 $q=1$ 时,$S_n=na_1,A_n=na_1^2,B_n=a_1$,
∴$B_nS_n=na_1^2=A_n$. 当 $q=-1$ 时,$S_n=a_1,A_n=na_1^2,B_n=na_1$, ∴$B_nS_n=na_1^2=A_n$. 当 $q\neq\pm1$ 时,设 $n=2k-1$ $(k\in\mathbf{N}^*)$,$S_{2k-1}=\frac{a_1(1-q^{2k-1})}{1-q}$,

$A_{2k-1}=\frac{a_1^2[1-(q^2)^{2k-1}]}{1-q^2}=\frac{a_1^2(1-q^{2k-1})(1+q^{2k-1})}{1-q^2}$,$B_{2k-1}=\frac{a_1[1-(-q)^{2k-1}]}{1+q}=\frac{a_1(1+q^{2k-1})}{1+q}$,

∴$B_{2k-1}S_{2k-1}=A_{2k-1}$. 综上所述,当 n 为奇数时,$B_nS_n=A_n$.

14. 解:(1) 由题意知,$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$

∵$b_n=3\log_{\frac{1}{4}}a_n-2$,$b_1=3\log_{\frac{1}{4}}a_1-2=1$,

∴$b_{n+1}-b_n=3\log_{\frac{1}{4}}a_{n+1}-3\log_{\frac{1}{4}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=3\log_{\frac{1}{4}}q=3$.

∴数列$\{b_n\}$是首项 $b_1=1$,公差 $d=3$ 的等差数列.

(2) 由(1)知,$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$,$b_n=3n-2(n\in\mathbf{N}^*)$

∴$c_n=(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$,$(n\in\mathbf{N}^*)$ ∴$S_n=1\times\frac{1}{4}+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+7\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(3n-5)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$,于是$\frac{1}{4}S_n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+7\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots+(3n-5)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$,两式相减,得$\frac{3}{4}S_n=\frac{1}{4}+3\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]-(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}-(3n+2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$. ∴$S_n=\frac{2}{3}-\frac{12n+8}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

第 25 天 不等式(1)

1. $\{x|4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant7\}$ **2.** $[2-\sqrt{13},2+\sqrt{13}]$
3. 4 **4.** $(1,3)$ **5.** $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$ **6.** $P<Q<R$ **7.** 4 **8.** $b<0<a$ **9.** $\frac{1}{6}$ **10.** 24

11. 解:∵$\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}$,∴当 $a=0$ 时,$\frac{1}{1+a}=1-a$. 当 $a>-1$ 且 $a\neq0$ 时,$\frac{1}{1+a}>1-a$,当 $a<-1$ 时,$\frac{1}{1+a}<1-a$.

12. 解:(1) 设 $P(x,y)$是函数 $f(x)=\sin x$ 的图象上任意一点,按向量 $\boldsymbol{a}=(-\pi,-2)$平移后在函数 $g(x)$的图象上的对应点为 $P'(x',y')$,则:$\begin{cases}x'=x-\pi,\\y'=y-2,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x=x'+\pi,\\y=y'+2,\end{cases}$即 $y'+2=\sin(x'+\pi)$,所以函数 $g(x)=-\sin x-2$;

(2) ∵$F(x)=f(x)-\frac{1}{g(x)}=\sin x+\frac{1}{\sin x+2}$

$$=\sin x+2+\frac{1}{\sin x+2}-2$$

$$\geqslant2\sqrt{(\sin x+2)\cdot\frac{1}{\sin x+2}}-2=0,$$

当 $\sin x+2=\frac{1}{\sin x+2}$,即 $\sin x=-1$ 时,$F(x)_{\min}=0$.

13. 解:由已知得 $0<a<1$,由 $f(3mx-1)>f(1+mx-x^2)>f(m+2)$,$x\in(0,1]$恒成立⇔$\begin{cases}3mx-1<1+mx-x^2,\\1+mx-x^2<m+2,\end{cases}$在 $x\in(0,1]$时恒成立,整理,当 $x\in(0,1]$时,$\begin{cases}2mx<2-x^2,\\m(x-1)<x^2+1\end{cases}$恒成立,即当 $x\in(0,1)$时,$\begin{cases}m<\frac{2-x^2}{2x}\\m>\frac{x^2+1}{x-1}\end{cases}$恒成立,且 $x=1$ 时,$\begin{cases}2mx<1-x^2\\m(x-1)<x^2+1\end{cases}$恒成立,∵$\frac{2-x^2}{2x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$在 $x\in(0,1]$上为减函数,∴$\frac{2-x^2}{2x}>\frac{1}{2}$,∴$m<\frac{2-x^2}{x-1}$恒成立,得 $m<\frac{1}{2}$. 又∵$\frac{x^2+1}{x-1}=(x-1)+\frac{12}{x-1}+2$,在 $x\in(0,1)$上是减函数,∴$\frac{x^2+1}{x-1}<-1$. ∴$m>\frac{x^2+1}{x-1}$恒成立,得 $m\geqslant-1$. 当 $x\in(0,1)$时,$\begin{cases}m<\frac{1-x^2}{2x},\\m>\frac{x^2+1}{x-1}\end{cases}$恒成立⇔$m\in\left[-1,\frac{1}{2}\right)$ ① 当 $x=1$ 时,$\begin{cases}2mx<2-x^2,\\m(x-1)<x^2+1,\end{cases}$即是$\begin{cases}m<\frac{1}{2},\\\frac{1}{2}<1.\end{cases}$

∴$m<\frac{1}{2}$.② ∴①、②两式求交集 $m\in[-1,\frac{1}{2})$,使 $x\in(0,1]$时,$f(3mx-1)>f(1+mx-x^2)>f(m+2)$恒成立,$m$ 的取值范围是$\left[-1,\frac{1}{2}\right)$.

14. 解:原不等式可化为:$(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$,1°若 $a>\frac{1}{a}$,即 $-1<a<0$ 或 $a>1$ 时,解集$\left\{x|\frac{1}{a}<x<a\right\}$;
2°若 $a=\frac{1}{a}$,即 $a\neq\pm1$ 时,解集为∅; 3°若 $a<\frac{1}{a}$,即 $0<a<1$ 或 $a<-1$ 时,解集为$\left\{x|a<x<\frac{1}{a}\right\}$.

第 26 天 不等式(2)

1. $(-4,-2)\cup(0,2)$ **2.** $M>N$ **3.** $a\geqslant\frac{14}{5}$
4. $-2<x<1$ **5.** $-1\leqslant a\leqslant1$ **6.** lg3
7. $\left\{x|-\frac{3+\sqrt{33}}{4}<x<3\right\}$ **8.** $\begin{cases}x<1\\y>0\\3x-2y+3>0\end{cases}$
9. $[-3,2)$ **10.** -6

11. 解:由 $x^2-4x+3>0$,$-x+1>0$,得 $x<1$,所以依对数的性质有:$x^2-4x+3>-x+1$,∴$x^2-3x+2>0$,∴$x>2$ 或$x<1$,又 $x<1$,∴$x<1$,不等式的解集为$\{x|$

$x<1\}$.

12. 证明：$\because a>0,b>0$. $\therefore \frac{b}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\geqslant 2\sqrt{b}$. $\frac{a}{\sqrt{b}}+\sqrt{b}\geqslant 2\sqrt{a}$.
两式相加即得$\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

13. 解：$\because a>0,b>0$,(1) 由 $ab=a+b+3\geqslant 2\sqrt{ab}+3$,得 $ab-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0$,又 $\sqrt{ab}>0$,$\therefore \sqrt{ab}\geqslant 3$,$ab\geqslant 9$. 当且仅当 $a=b=3$ 时，等号成立，故 ab 取值范围为$[9,+\infty)$.
(2) 由 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$,$\therefore a+b+3=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,即$(a+b)^2-4(a+b)+12\geqslant 0$,$(a+b+2)(a+b-6)\geqslant 0$,$\because a,b\in\mathbf{R}^+$,$a+b+2>0$,$\therefore a+b\geqslant 6$. 当且仅当 $a=b=3$ 时等号成立，故 $a+b$ 的取值范围是$[6,+\infty)$.

14. 解：(1) $\because f(\sin\alpha)\geqslant 0$,$\therefore f(1)\geqslant 0$. 又$\because f(2+\cos\beta)\leqslant 0$,$\therefore f(1)\leqslant 0$. $\therefore f(1)=1+b+c=0$ $\quad\therefore b+c=-1$.
(2) $\because f(\sin\alpha)\geqslant 0$,$\therefore f(-1)=1-b+c\geqslant 0$. 又$\because f(2+\cos\beta)\leqslant 0$,$\therefore f(3)=9+3b+c\leqslant 0$. $\because b=-c-1$,$\therefore c\geqslant -1$ 且 $c\geqslant 3$ $\quad\therefore c\geqslant 3$. (3) $f(x)=x^2+bx+c=x^2-(c+1)x+c$ 对称轴 $x=\frac{c+1}{2}\geqslant 2$. $\therefore f(\sin\alpha)$在$[-1,1]$上单调递减，$\therefore f(\sin\alpha)$的最大值等于$f(-1)=1-b+c=8$. 又 $b+c=-1$,$\therefore b=-4$,$c=3$.

第 27 天　常用逻辑用语

1. 充分不必要　**2.** 存在一个能被 2 整除的整数不是偶数　**3.** 充分不必要　**4.** D　**5.** $(-\infty,1]$　**6.** $a^2+b^2=0$　**7.** $(-2,2]$　**8.** 不拥有的人们不幸福　**9.** ②④

10. $\frac{1}{4}$

11. 解析：设 $A=\{x|x^2-4ax+3a^2<0\}=\{x|3a<x<a(a<0)\}$,$B=\{x|x^2+2x-8>0\}=\{x|x<-4$ 或 $x>2\}$.
因为$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要不充分条件，所以 q 是 p 的不要不充分条件，所以 $A\subseteq B$. 所以 $3a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -4$,又 $a<0$,所以 a 的取值范围 $a\leqslant -4$.

12. 解析：p 为真命题$\Leftrightarrow f'(x)=3x^2-a\leqslant 0$ 在$[-1,1]$上恒成立$\Leftrightarrow a\geqslant 3x^2$ 在$[-1,1]$上恒成立，所以 $a\geqslant 3$.
q 为真命题$\Leftrightarrow\Delta=a^2-4\geqslant 0$ 恒成立，所以 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 2$.
由题意 p 和 q 有且只有一个是真命题.
p 真 q 假$\Leftrightarrow\begin{cases}a\geqslant 3,\\-2<a<2\end{cases}\Leftrightarrow a\in\varnothing$,$p$ 假 q 真$\Leftrightarrow\begin{cases}a<3,\\a\leqslant -2\text{ 或 }a\geqslant 2\end{cases}\Leftrightarrow a\leqslant -2$ 或 $2\leqslant a<3$.
综上所述：$a\in(-\infty,-2]\cup[2,3)$.

13. 解析：(1) 由 $x^2-4ax+3a^2<0$ 得$(x-3a)(x-a)<0$,当 $a=1$ 时，解得 $1<x<3$,即 p 为真时实数 x 的取值范围是 $1<x<3$.
由$\begin{cases}x^2-x-6\leqslant 0,\\x^2+2x-8>0,\end{cases}$得 $2<x\leqslant 3$,即 q 为真时实数 x 的取值范围是 $2<x\leqslant 3$.
若 $p\wedge q$ 为真，则 p 真且 q 真，
所以实数 x 的取值范围是 $2<x<3$.
(2) p 是 q 的必要不充分条件，即 $q\Rightarrow p$,且 $p\not\Rightarrow q$,
设 $A=\{x|p(x)\}$,$B=\{x|q(x)\}$,则 A 不包含 B,
又 $B=(2,3]$,当 $a>0$ 时，$A=(a,3a)$;$a<0$ 时，$A=(3a,a)$.
所以当 $a>0$ 时，有$\begin{cases}a\leqslant 2,\\3<3a,\end{cases}$解得 $1<a\leqslant 2$;当 $a<0$ 时，显然 $A\cap B=\varnothing$,不合题意.
所以实数 a 的取值范围是 $1<a\leqslant 2$.

14. 解析：先证充分性，而必要性只需要通过举反例来否定.
先证明条件的充分性：
$\because\begin{cases}a\geqslant 2\\b\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow a^2\geqslant 4\geqslant b$,$\therefore\Delta=4(a^2-b)\geqslant 0$,$\therefore$方程有实数根. ①
$\because\begin{cases}a\geqslant 2,\\b\geqslant -4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a\leqslant -4,\\b\geqslant -4,\end{cases}$
$\therefore(x_1-2)+(x_2-2)=(x_1+x_2)-4=-2a-4\leqslant -4-4=-8<0$,
而$(x_1-2)(x_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=b+4a+4\geqslant -4+8+4=8>0$,
$\therefore\begin{cases}(x_1-2)+(x_2-2)<0,\\(x_1-2)(x_2-2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2<0,\\x_2-2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1<2,\\x_2<2\end{cases}$ ②,
①、②知“$a\geqslant 2$ 且$|b|\leqslant 4$”$\Rightarrow$“方程有实数根，且两根均小于 2”.
再验证条件不必要：
$\because$方程 $x^2-x=0$ 的两根为 $x_1=0$,$x_2=1$,则方程的两根均小于 2,而 $a=-\frac{1}{2}<2$,
$\therefore$“方程的两根小于 2”$\Rightarrow$“$a\geqslant 2$ 且$|b|\leqslant 4$”.
综上，$a\geqslant 2$ 且$|b|\leqslant 4$ 是方程有实数根且两根均小于 2 的充分但不必要条件.

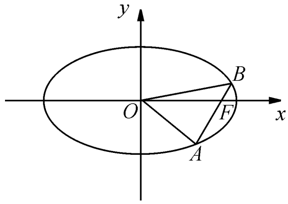
第 28 天　圆锥曲线与方程(1)

1. -1 或 3　**2.** $y^2=8x$　**3.** $\frac{3}{2}$　**4.** $1+\frac{3\sqrt{6}}{2}$　**5.** $y=\pm 2\sqrt{2}x$　**6.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 或$\frac{y^2}{7}+\frac{2x^2}{7}=1$　**7.** 2　**8.** $e=\sqrt{3}+1$　**9.** $\frac{7}{13}$　**10.** $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

11. 解：建立平面直角坐标系.
因为曲线 C 过点 P,
所以 $MA+MB$ 为定值就是 $PA+PB$,根据条件求得 $PA+PB=2(1+\sqrt{3})$,所以 $MA+MB=2(1+\sqrt{3})>AB$.
根据椭圆定义可知，点 M 的轨迹是以 A,B 为焦点，且长轴长为 $2(1+\sqrt{3})$的椭圆，在所建的坐标系中，方程形式为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.
根据条件得 $a=1+\sqrt{3}$,$c=2$,$b^2=a^2-c^2=12$,
所以曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{4+2\sqrt{3}}+\frac{y^2}{12}=1$.

12. 解：(1) 设 $P(x,y)$,由抛物线定义知，点 P 的轨迹 E 为抛物线，方程为 $y^2=4x$.
(2) l:$y=x-1$,代入 $y^2=4x$,消去 x 得 $y^2-4y-4=0$.
设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$|y_2-y_1|=4\sqrt{2}$,所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times|OF|\times|y_2-y_1|=\frac{1}{2}\times 1\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

13. 解：(1) 由题意，设椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,则 $2a=4\sqrt{3}$,$a=2\sqrt{3}$.
因为点$(2\sqrt{2},1)$在椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，所以$\frac{8}{12}+\frac{1}{b^2}=1$,解得 $b=\sqrt{3}$.
所以所求椭圆方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$.
(2) 设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$$(y_1<0,y_2>0)$,点 F 的坐标为 $F(3,0)$.
由$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$,得$\begin{cases}3-x_1=3(x_2-3),\\-y_1=3y_2.\end{cases}$
即$\begin{cases}x_1=-3x_2+12,\\y_1=-3y_2.\end{cases}$ ①
则$\overrightarrow{F_1M}=(5,y_1)$,$\overrightarrow{F_2N}=(3,y_2)$,$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=15+y_1y_2=0$,



又 A,B 在椭圆 C 上,

所以 $\begin{cases}\dfrac{(-3x_2+12)^2}{12}+\dfrac{(-3y_2)^2}{3}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{12}+\dfrac{y_2^2}{3}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_2=\dfrac{10}{3},\\ y_2=\dfrac{\sqrt{2}}{3}.\end{cases}$

所以 $B\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$,代入①得 A 点坐标为 $(2,-\sqrt{2})$.

因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,所以 $OA\perp AB$. 所以过 O,A,B 三点的圆就是以 OB 为直径的圆,

其方程为 $x^2+y^2-\dfrac{10}{3}x-\dfrac{\sqrt{2}}{3}y=0$.

14. 解:(1) 由已知,$A(-4,0)$,$B(4,0)$,$F(2,0)$,$l:x=8$.

设 $N(8,t)(t>0)AM=MN$,故 $M\left(2,\dfrac{t}{2}\right)$.

M 在椭圆上,$t=6$,$M(2,3)$.

$\cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{36+9}\sqrt{4+9}}=-\dfrac{\sqrt{65}}{65}$.

(2) 设圆方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,将 A、F、N 代入

$\begin{cases}16-4D+F=0,\\ 4+2D+F=0,\\ 64+t^2+8D+Et+F=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=2,\\ E=-t-\dfrac{72}{t},\\ F=-8.\end{cases}$

圆方程:$x^2+y^2+2x-\left(t+\dfrac{72}{t}\right)y-8=0$.

令 $x=0$,$y^2-\left(t+\dfrac{72}{t}\right)y-8=0$.

$P(0,y_1)$,$Q(0,y_2)$.

PQ 中点 $(0,9)$,$y_1+y_2=18$,$t+\dfrac{72}{t}=18$.

$\therefore x^2+y^2+2x-18y-8=0$.

第 29 天 圆锥曲线与方程(2)

1. $2\sqrt{2}$ **2.** $\dfrac{5}{3}$ **3.** $\sqrt{10}$ **4.** $x=-1$ **5.** $\sqrt{3}$ **6.** $\sqrt{2}+1$

7. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ **8.** 8 **9.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **10.** $\dfrac{1}{2}\leqslant e<1$

11. 解:(1) 设椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

由 $e=\dfrac{1}{2}$,得 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$,$b^2=a^2-c^2=3c^2$,所以 $\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$,将 A 点代入,得 $c^2=4$,

所以椭圆 E 的方程为:$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

(2) 由(1)知 $F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,所以直线 AF_1 方程为 $y=\dfrac{3}{4}(x+2)$,即 $3x-4y+6=0$,直线 AF_2 方程为 $x=2$.

由椭圆 E 的图形知,$\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线的斜率为正数.

设 $P(x,y)$ 为 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线上任意一点,则有 $\dfrac{|3x-4y+6|}{5}=|x-2|$,

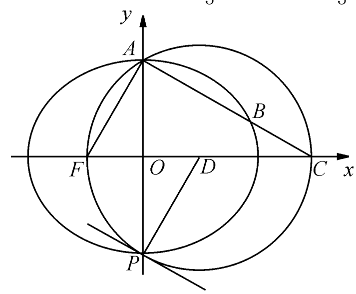
若 $3x-4y+6=5x-10$,得 $x+2y-8=0$,其斜率为负,不合题意,舍去.

于是 $3x-4y+6=-5x+10$,即 $2x-y-1=0$,

$\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线方程为 $2x-y-1=0$.

12. 解:(1) 由条件得 $F(-1,0)$,$A(0,\sqrt{3})$,$k_{AF}=\sqrt{3}$.

因为 $AB\perp AF$,所以 $k_{AB}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,$AB:y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$.



令 $y=0$,得 $x=3$,所以点 C 的坐标为 $(3,0)$.

由 $\begin{cases}y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3},\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $13x^2-24x=0$,解得 $x_1=0$(舍)

$x_2=\dfrac{24}{13}$.

所以点 B 的坐标为 $\left(\dfrac{24}{13},\dfrac{5\sqrt{3}}{13}\right)$. 因为 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$,所以

$\lambda>0$,且 $\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\dfrac{24}{13}}{3-\dfrac{24}{13}}=\dfrac{8}{5}$.

(2) 因为 $\triangle ACF$ 是直角三角形,

所以 $\triangle ACF$ 的外接圆的圆心为 $D(1,0)$,半径为 2. 所以圆 D 的方程为 $(x-1)^2+y^2=4$.

因为 AB 为定值,所以当 $\triangle PAB$ 的面积最大时点 P 到直线 AC 的距离最大.

过 D 作直线 AC 的垂线 m,则点 P 为直线 m 与圆 D 的交点 .

直线 $m:y=\sqrt{3}(x-1)$ 与 $(x-1)^2+y^2=4$ 联立得 $x=2$(舍)或 $x=0$,

所以点 P 的坐标为 $(0,\sqrt{3})$.

13. 解:(1) 因为 $2c=2$,且 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$,所以 $c=1$,$a=2$.

所以 $b^2=3$. 所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 设点 M 的坐标为 (x_0,y_0),则 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$.

因为 $F_1(-1,0)$,$\dfrac{a^2}{c}=4$,所以直线 l 的方程为 $x=4$.

由于圆 M 与 l 由公共点,所以 M 到 l 的距离 $4-x_0$ 小于或等于圆的半径 R.

因为 $R^2=MF_1^2=(x_0+1)^2+y_0^2$,所以 $|4-x_0|^2\leqslant(x_0+1)^2+y_0^2$,即 $y_0^2+10x_0-15\geqslant0$.

又因为 $y_0^2=3\left(1-\dfrac{x_0^2}{4}\right)$,所以 $3-\dfrac{3x_0^2}{4}+10x_0-15\geqslant0$.

解得 $\dfrac{4}{3}\leqslant x_0\leqslant2$.

当 $x_0=\dfrac{4}{3}$ 时,$|y_0|=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$,所以 $(S_{\triangle MFF_2})_{\max}=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{\sqrt{15}}{3}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

14. 解:(1) $\because e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore a=\sqrt{2}c$,又 $\because a^2=b^2+c^2$,$\therefore a=b$.

$\because\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $P(2,\sqrt{2})$,$\therefore\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1$. 解得 $a^2=8$,$b^2=c^2=4$,$\therefore$ 椭圆方程:$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. $\because A(4,0)$,$B(0,2)$,$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $x+2y-4-0$,则圆心 O

到直线 AB 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{5}}$，∴圆 O 的半径 $r=\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}=2$，∴圆的方程：$x^2+y^2=4$.

(2) 右准线的方程为 $x=4$，由题可设 $M(4,t)$，$N(x_0,y_0)$，定点 $Q(x,y)$.

∵MN 与 NQ 的比值是常数并且 Q 不同于 M，∴$NQ^2=\lambda NM^2$，λ 是正常数并且不等于 1，

即 $(x_0-x)^2+(y_0-y)^2=\lambda(x_0-4)^2+\lambda(y_0-t)^2$.

将 $x_0^2+y_0^2=4$ 代入有 $-2xx_0-2yy_0+x^2+y^2+4=-8\lambda x_0-2\lambda ty_0+(20+t^2)\lambda$，

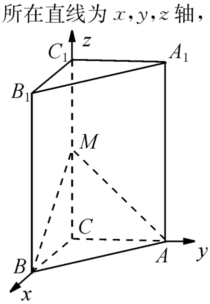
∵有无数组 (x_0,y_0)，从而 $\begin{cases}x=4\lambda,\\y=t\lambda,\\x^2+y^2+4=(20+t^2)\lambda,\end{cases}$ 解得：$\lambda=1$（舍去）或 $\lambda=\frac{4}{16+t^2}$.

于是定值为：$\frac{NM}{NQ}=\frac{\sqrt{16+t^2}}{2}$，又 $16+t^2=\frac{4}{\lambda}$，代入得 $x^2+y^2=4\lambda$，于是 $x^2+y^2=x$，故 Q 在圆心 $(\frac{1}{2},0)$，半径为 $\frac{1}{2}$ 的定圆上.

第 30 天　空间向量与立体几何（理科要求）

1. 解析：本题主要考查立体几何中垂直与空间角的求解，考查考生的空间想象与推理计算的能力.

(1) 以点 C 为原点，CB，CA，CC_1 所在直线为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 $C-xyz$，如图所示，



则 $B(1,0,0)$，$A(0,\sqrt{3},0)$，$A_1(0,\sqrt{3},\sqrt{6})$，$M\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{A_1B}=(1,-\sqrt{3},-\sqrt{6})$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,-\sqrt{3},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，

因为 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AM}=1\times0+(-\sqrt{3})\times(-\sqrt{3})+(-\sqrt{6})\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=0$，所以 $A_1B\perp AM$.

(2) 因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC.

又 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $CC_1\perp BC$.

因为 $\angle ACB=90°$，即 $BC\perp AC$，所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1，即 $BC\perp$ 平面 AMC.

所以 $\overrightarrow{CB}$ 是平面 AMC 的一个法向量，$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 BAM 的一个法向量，

$\overrightarrow{BA}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BM}=\left(-1,0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0,\\-x+\frac{\sqrt{6}}{2}z=0.\end{cases}$

令 $z=2$，得 $x=\sqrt{6}$，$y=\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{6},\sqrt{2},2)$.

因为 $|\overrightarrow{CB}|=1$，$|\boldsymbol{n}|=2\sqrt{3}$，所以 $\cos<\overrightarrow{CB},\boldsymbol{n}>=\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因此二面角 $B-AM-C$ 的大小为 $45°$.

2. 证明：以 A 为坐标原点，AD 长为单位长度，建立空间直角坐标系，则各点坐标为 $A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(1,1,0)$，$D(1,0,0)$，$P(0,0,1)$，$M\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

(1) 证明：因 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，故 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，所以 $AP\perp DC$.

由题设知 $AD\perp DC$，且 AP 与 AD 是平面 PAD 内的两条相交直线，由此得 $DC\perp$ 面 PAD. 又 DC 在面 PCD 上，故面 $PAD\perp$ 面 PCD.

(2) 解：因 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(0,2,-1)$，

故 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=2$，所以

$\cos<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}>=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(3) 解：平面 AMC 的一个法向量设为 $\boldsymbol{n}=(1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，

∴$\begin{cases}1+y_1=0,\\y_1+\frac{1}{2}z_1=0\end{cases}$∴$\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$.

平面 BMC 的一个法向量设为 $\boldsymbol{m}=(1,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{BC}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{BM}=\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$，

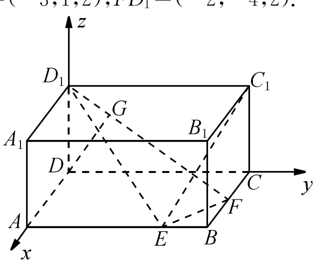
∴$\begin{cases}1-y_2=0\\-y_2+\frac{1}{2}z_2=0\end{cases}$，∴$\boldsymbol{n}=(1,1,2)$.

∴$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{1-1+4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2}{3}$. ∴所求二面角的余弦值为 $-\frac{2}{3}$.

3. 解析：有长方体模型易于建立空间直角坐标系，运用向量数量积求夹角，以及运用向量的数量积的坐标运算证明垂直.

(1) 如图，以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正向建立空间直角坐标系，则有 $D(0,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$C_1(0,4,2)$，$E(3,3,0)$，$F(2,4,0)$，

于是 $\overrightarrow{EC_1}=(-3,1,2)$，$\overrightarrow{FD_1}=(-2,-4,2)$.



设 EC_1 与 FD_1 所成角为 α，则

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{EC_1}\cdot\overrightarrow{FD_1}}{|\overrightarrow{EC_1}||\overrightarrow{FD_1}|}=\frac{(-3)\times(-2)+1\times(-4)+2\times2}{\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+2^2}}=\frac{\sqrt{21}}{14}.$$

∴异面直线 EC_1 与 FD_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

(2) 因点 G 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，故可设 $G(x,y,2)$.

$\overrightarrow{DG}=(x,y,2)$，$\overrightarrow{FD_1}=(-2,-4,2)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$.

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{FD_1}=0,\\\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x-4y+4=0,\\-x+y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\y=\frac{2}{3}.\end{cases}$

故当点 G 在面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且到 A_1D_1，C_1D_1 距离均为 $\frac{2}{3}$ 时，$DG\perp$ 平面 D_1EF.

4. 解：(1) 以 AB，AC，AA_1 分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $\overrightarrow{PN}=\left(\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2},-1\right)$，

平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{PN},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{PN}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PN}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}}$.

于是问题转化为二次函数求最值，而 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，当 θ 最大时，$\sin\theta$ 最大，所以当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$(\sin\theta)_{\max}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(3) 已知给出了平面 PMN 与平面 ABC 所成的二面角为 $45°$，即可得到平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$，设平面 PMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{MP}=\left(\lambda,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{NP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MP}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}y+z=0,\\ \lambda x-y+\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y=\frac{2\lambda+1}{3}x,\\ z=\frac{2(1-\lambda)}{3}x.\end{cases}$

令 $x=3$，得 $\boldsymbol{m}=(3,2\lambda+1,2(1-\lambda))$，这样 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 就表示出来了，于是由

$$|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|2(1-\lambda)|}{\sqrt{9+(2\lambda+1)^2+4(1-\lambda)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$，故点 P 在 B_1A_1 的延长线上，且 $|A_1P|=\dfrac{1}{2}$.

5. 证明：(1) 以 A 为原点，AB 为 x 轴，AD 为 y 轴，AA_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，则 $B(1,0,0)$，$D_1(0,1,1)$，$E(0,0,t)$，$F(1,1,1-t)$，其中 $0\leqslant t\leqslant 1$，则 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD_1}=(-1,0,t)$，所以 $BE/\!/FD_1$，所以 B,E,D_1,F 四点共面.
(2) $\overrightarrow{BA_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,t)$，$\overrightarrow{BF}=(0,1,1-t)$，
可求平面 BEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(t,t-1,1)$，由已知 $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{|\overrightarrow{BA_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BA_1}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{2}$，所以 $t=0$.

6. (1) 证明：如图 1，取 AC 中点 F，连接 OF,BF.
∵O 是 EC 中点，∴OF 是△CAE 的中位线，
∴$OF/\!/EA$，且 $OF=\dfrac{1}{2}EA$，

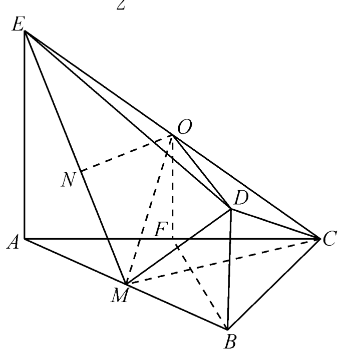


图 1

又 $DB/\!/EA$，且 $DB=\dfrac{1}{2}EA$，∴$OF/\!/DB$ 且 $OF=DB$，
∴四边形 $ODBF$ 是平行四边形，∴$OD/\!/FB$.
∵$OD\not\subset$面 ABC，$FB\subset$面 ABC，$OD/\!/$平面 ABC.
(2) 证明：连接 CM，∵N 是 EM 的中点，∴$ON/\!/CM$.
∵平面 $ABDE\perp$平面 ABC，平面 $ABDE\cap$平面 $ABC=AB$，
$BD\subset$平面 $ABDE$，$BD\perp AB$，∴$BD\perp$平面 ABC，
∵$CM\subset$平面 ABC，∴$BD\perp CM$，∴$BD\perp ON$.
又△ABC 是等腰直角三角形，$AC=BC$，M 是 AB 的中点，
∴$CM\perp AB$，∴$ON\perp AB$，
由 $AB,DB\subset$平面 $ABDE$，$AB\cap DB=B$，∴$ON\perp$平面 $ABDE$.
(3) 解：建立如图 2 所示的空间直角坐标系.

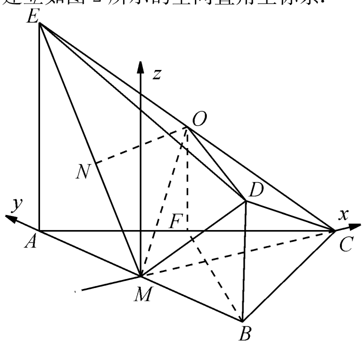


图 2

由条件，得 $M(0,0,0)$，$C(2\sqrt{2},0,0)$，$E(0,2\sqrt{2},4)$，$D(0,-2\sqrt{2},2)$，∴$O(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$，
∴$\overrightarrow{MO}=(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$，$\overrightarrow{MD}=(0,-2\sqrt{2},2)$，$\overrightarrow{CD}=(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},2)$，
设平面 ODM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，
由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{MO}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{MD}$，
∴$\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+2z=0\\ -2\sqrt{2}y+2z=0\end{cases}$，取 $\boldsymbol{n}=(-3,1,\sqrt{2})$，
设直线 CD 与平面 ODM 所成角为 θ，则
$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CD}\rangle|=\left|\dfrac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}\times2\sqrt{3}}\right|=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$，
∴直线 CD 与平面 ODM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

第 31 天　导数及其应用(1)

1. $(-1,11)$　**2.** $(-2,15)$　**3.** 6　**4.** 6　**5.** $[-2,-1]$　**6.** $\left[-\dfrac{8}{3},+\infty\right)$　**7.** $x-y-2=0$　**8.** $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$　**9.** $\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$　**10.** 9

11. 解：(1) 设切线的斜率为 k，因为 $f'(x)=3x^2-3$，点 $P(1,-2)$ 在曲线上，∴ $k=3-3=0$，所以所求的切线的方程为 $y=-2$.
(2) $f'(x)=3x^2-3$，设切点 $Q(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{y_0+6}{x_0-2}=3x_0^2-3$，即 $\dfrac{x_0^3-3x_0+6}{x_0-2}=3x_0^2-3$，解得 $x_0=0$ 或 3，由 $k=f'(x_0)$ 得 $k=-3$ 或 24，得 $y=-3x$ 或 $y=24x-54$.

12. 解：(1) 当 $t=2$ 时，$f(x)=x+\dfrac{2}{x}$，$f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{x^2-2}{x^2}>0$，解得 $x>\sqrt{2}$，或 $x<-\sqrt{2}$. 则函数 $f(x)$ 有单调递增区间为 $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.
(2) 设 M、N 两点的横坐标分别为 x_1、x_2，
∵$f'(x)=1-\dfrac{t}{x^2}$，∴ 切线 PM 的方程为：$y-$

$\left(x_1+\frac{t}{x_1}\right)=\left(1-\frac{t}{x_1^2}\right)(x-x_1)$.

又∵切线 $\overrightarrow{PM}$ 过点 $P(1,0)$，∴有 $0-\left(x_1+\frac{t}{x_1}\right)=\left(1-\frac{t}{x_1^2}\right)(1-x_1)$.

即 $x_1^2+2tx_1-t=0$. ①

同理，由切线 PN 也过点$(1,0)$，得 $x_2^2+2tx_2-t=0$. ②

由①、②可得 x_1,x_2 是方程 $x^2+2tx-t=0$ 的两根，

$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=-2t\\ x_1\cdot x_2=-t.\end{cases}$ （*）

$$|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+\left(x_1+\frac{t}{x_1}-x_2-\frac{t}{x_2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2\left[1+\left(1-\frac{t}{x_1x_2}\right)^2\right]}$$
$$=\sqrt{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]\left[1+\left(1-\frac{t}{x_1x_2}\right)^2\right]}.$$

把(*)式代入，得 $|MN|=\sqrt{20t^2+20t}$，

因此，函数 $g(t)$ 的表达式为 $g(t)=\sqrt{20t^2+20t}\,(t>0)$.

13. 解：(1) $f'(x)=(3x-1)(x-1)$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=1$，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{3},1\right)$，$(1,+\infty)$ 上分别单调增、单调减、单调增，于是当 $x=\frac{1}{3}$ 时，有极大值 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$；$x=1$ 极小值 $f(1)=0$.

(2) 由(1)知 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{3},1\right)$，$(1,+\infty)$ 上分别单调增、单调减、单调增，

所以当 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 时，$G(a)=\frac{F(a)}{a}=(a-1)^2\geqslant\frac{4}{9}$，特别当 $a=\frac{1}{3}$ 时，有 $G(a)=\frac{4}{9}$；

当 $\frac{1}{3}<a\leqslant1$ 时，$F(a)=f\left(\frac{1}{3}\right)$，则 $G(a)=\frac{F\left(\frac{1}{3}\right)}{a}=\frac{4}{27a}\geqslant\frac{4}{27}$，所以对任意的 $0<a\leqslant1$，$G(a)_{\min}=\frac{4}{27}$.

(3) 由已知得 $h_1(x)=x+m-g(x)=2x^2-3x-\ln x+m-t\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$h'_1(x)=\frac{(4x+1)(x-1)}{x}$，得 $x\in(0,1)$ 时，$h'_1(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$h'_1(x)>0$，故 $x=1$ 时，函数 $h_1(x)$ 取到最小值. 从而 $m\geqslant t+1$；同样的，$h_2(x)=f(x)-x-m=x^3-2x^2-m\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，由 $h'_2(x)=3x\left(x-\frac{4}{3}\right)$，得 $x\in\left(0,\frac{4}{3}\right)$ 时，$h'_2<0$，$x\in\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ 时，$h'_2>0$，故 $x=\frac{4}{3}$ 时，函数 $h_2(x)$ 取到最小值. 从而 $m\leqslant-\frac{32}{27}$，$\therefore t+1\leqslant m\leqslant-\frac{32}{27}$. 由 m 的唯一性知 $t=-\frac{59}{27}$，$m=-\frac{32}{27}$.

14. 解：本题主要考查阅读材料，提取信息，建立数学模型的能力，同时考查利用所学知识(本题主要应用导数知识求最值)分析和解决实际问题的能力.

(1) 设点 C 受 A 污染源污染程度为 $\frac{ka}{x^2}$，点 C 受 B 污染源污染程度为 $\frac{kb}{(18-x)^2}$，其中 k 为比例系数，且 $k>0$.

从而点 C 处受污染程度 $y=\frac{ka}{x^2}+\frac{kb}{(18-x)^2}$.

(2) 因为 $a=1$，所以 $y=\frac{k}{x^2}+\frac{kb}{(18-x)^2}$，

$y'=k\left[\frac{-2}{x^3}+\frac{2b}{(18-x)^3}\right]$，令 $y'=0$，得 $x=\frac{18}{1+\sqrt[3]{b}}$，

又此时 $x=6$，解得 $b=8$，经验证符合题意.

所以，污染源 B 的污染强度 b 的值为 8.

第 32 天　导数及其应用(2)

1. $\ln2-1$　**2.** R　**3.** 32　**4.** 1　**5.** 21　**6.** $\{a\mid a<0\}$

7. $\log_3 2$　**8.** $1\leqslant b\leqslant5$　**9.** $\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$　**10.** $a\geqslant\frac{1}{2e}$

11. 解：(1) $f'(x)=(x-k+1)e^x$，令 $f'(x)=0$，$x=k-1$；所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,k-1)$ 上递减，在 $(k-1,+\infty)$ 上递增.

(2) 当 $k-1\leqslant0$，即 $k\leqslant1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上递增，所以 $f(x)_{\min}=f(0)=-k$；当 $0<k-1<1$，即 $1<k<2$ 时，由(1)知，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,k-1]$ 上递减，$(k-1,1]$ 上递增，所以 $f(x)_{\min}=f(k-1)=-e^{k-1}$；当 $k-1\geqslant1$，即 $k\geqslant2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上递减，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=(1-k)e$.

12. 解：(1) $f'(x)=(2ax+b)e^{2-x}+(ax^2+bx+c)e^{2-x}(-1)=[-ax^2+(2a-b)x+(b-c)]e^{2-x}$，

由题意，$\begin{cases}f'(1)=0,\\ f'(2)=-6,\\ f(2)=15,\end{cases}$

即 $\begin{cases}[-a+(2a-b)+(b-c)]e^1=0,\\ [-4a+2(2a-b)+(b-c)]e^0=-6,\\ (4a+2b+c)e^0=15,\end{cases}$

$\therefore a=c=1$，$b=5$；

(2) 由(1)知，$f(x)=(x^2+5x+1)e^{2-x}$，

$\therefore f'(x)=(-x^2-3x+4)e^{2-x}=-(x+4)(x-1)e^{2-x}$，

令 $f'(x)>0$，得 $-4<x<1$，$f'(x)<0$，得 $x<-4$ 或 $x>1$，

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-4,1)$，单调递减区间为 $(-\infty,-4)$ 和 $(1,+\infty)$.

由此可知，$f(x)$ 在 $x=1$ 处的取值是极大值.

13. 解：(1) $F(x)=f(x)+g(x)=\ln x+\frac{a}{x}\,(x>0)$，$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}\,(x>0)$.

因为 $a>0$，由 $F'(x)>0\Rightarrow x\in(a,+\infty)$，所以 $F(x)$ 在上单调递增；由 $F'(x)<0\Rightarrow x\in(0,a)$，所以 $F(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减.

(2) $F'(x)=\frac{x-a}{x^2}\,(0<x\leqslant3)$，$k=F'(x_0)=\frac{x_0-a}{x_0{}^2}\leqslant\frac{1}{2}\,(0<x_0\leqslant3)$ 恒成立，

即 $a\geqslant\left(-\frac{1}{2}x_0^2+x_0\right)_{\max}$，当 $x_0=1$ 时取得最大值 $\frac{1}{2}$.

所以，$a\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $a_{\min}=\frac{1}{2}$.

(3) 因为 $x\geqslant e$，所以 $x\ln x\geqslant ax-a\Leftrightarrow a\leqslant\frac{x\ln x}{x-1}$，令 $h(x)=\frac{x\ln x}{x-1}$，$x\in[e,+\infty)$，则

$h'(x)=\frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}$.

因为当 $x\geqslant e$ 时，$(x-\ln x-1)'=1-\frac{1}{x}>0$，所以 $x-\ln x-1\geqslant e-\ln e-1=e-2>0$，

所以 $h'(x)>0$，所以 $h(x)_{\min}=h(e)=\frac{e}{e-1}$，

所以 $a\leqslant\frac{e}{e-1}$.

14. 解：先求出平台 MGK 面积的表达式，也就是目标函数，是包含 s 和 t 两个未知数的函数，恰好 st 是一个整体，可用换元法转化为只含有一个未知数的函数，先应用

基本不等式求出 st(函数自变量)的取值范围,再利用导数判断函数的单调性,最后利用单调性求出函数的最小值.第(2)问需要根据第(1)问中函数的单调性求出 st 的取值范围,再代入消元,解出 t 的范围.

(1) 由题意,得 $K\left(s,\frac{200}{s}\right)$,$G\left(\frac{200}{t},t\right)$ $(s>0,t>0)$,

又因为 $M(s,t)$ 在线段 CD:$x+2y=20(0\leqslant x\leqslant 20)$上,

所以 $s+2t=20(0<s<20)$,

$S_{\triangle MGK}=\frac{1}{2}\cdot MG\cdot MK=\frac{1}{2}\left(\frac{200}{t}-s\right)\left(\frac{200}{s}-t\right)=\frac{1}{2}\left(st+\frac{40\ 000}{st}-400\right)$.

由 $20=s+2t\geqslant 2\sqrt{2st}$,得 $0<st\leqslant 50$,当且仅当 $s=10,t=5$ 时等号成立.

令 $st=u$,则 $f(u)=S_{\triangle MGK}=\frac{1}{2}\left(u+\frac{40\ 000}{u}-400\right)$,$u\in(0,50]$.

又 $f'(u)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{40\ 000}{u^2}\right)<0$,故 $f(u)$在$(0,50]$上单调递减,

所以 $f(u)_{\min}=f(50)=225$,此时 $s=10,t=5$.

所以三角形 MGK 面积的最小值为 225 平方米.

(2) 由题意得 $f(u)\geqslant 320$,

当$\frac{1}{2}\left(u+\frac{40\ 000}{u}-400\right)=320$,解得 $u=40$ 或 $u=1\ 000$(舍去),

由(1)知 $st\leqslant 40$,

即$(20-2t)t\leqslant 40$,解之得 $5-\sqrt{5}\leqslant t\leqslant 5+\sqrt{5}$.

所以 t 的范围是$[5-\sqrt{5},5+\sqrt{5}]$.

第 33 天 推理与证明

1. $Ax+By+Cz+D=0$ 2. $\frac{3V}{S}$ 3. 28 4. $f(n)+n-1$

5. $\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$ 6. 直角三角形 7. 9 8. $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}$ 9. $\frac{a^3}{8}$ 10. n^n

11. 解析:要证$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$,
只需证$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\sqrt{a-b})^2$.
即证 $a+b-2\sqrt{ab}<a-b$,只需证 $b<\sqrt{ab}$,即证 $b<a$.
显然 $b<a$ 成立,
因为 $b<a$,因此$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$成立.

12. 解:$\because a$、b、c 成等差数列,$\therefore 2b=a+c$.
假设$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$成等差数列,
则$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\Rightarrow(a+c)^2=4ac\Rightarrow(a-c)^2=0$,
$\therefore a=c$,从而 $d=0$ 与 $d\neq 0$ 矛盾.
$\therefore \frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$不可能成等差数列.

13. 解析:(1) 当 $n=1$ 时,左边$=\sqrt{2}$,右边$=2$,不等式成立.
(2) 假设当 $n=k$ 时不等式成立,
即 $\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2+3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}<\frac{1}{2}(k+1)^2$,
则 $\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2+3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}+\sqrt{(k+1)(k+2)}$
$<\frac{1}{2}(k+1)^2+\sqrt{(k+1)(k+2)}$,
$\because \frac{1}{2}(k+1)^2+\sqrt{(k+1)(k+2)}-\frac{(k+2)^2}{2}$
$=\sqrt{(k+1)(k+2)}-\frac{(k+1)+(k+2)}{2}<0$.
$\therefore \sqrt{1\times 2}+\sqrt{2+3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{1}{2}[(k+1)+1]^2$,
$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时,不等式成立,
由(1)(2)知,不等式对所有正整数都成立.

14. (1) 解:$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=1$,
又$\because \alpha$ 为锐角,
$\therefore 2\alpha=\frac{\pi}{4}$,$\therefore \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$,$f(x)=x^2+x$.
(2) 证明:$a_{n+1}=a_n^2+a_n$,$\because a_1=\frac{1}{2}$,$\therefore a_2,a_3,\cdots,a_n$ 都大于 0.
$\therefore a_n^2>0$,$\therefore a_{n+1}>a_n$.
(3) 证明:$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n^2+a_n}=\frac{1}{a_n(1+a_n)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{1+a_n}$,
$\therefore \frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$,
$\therefore \frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}$
$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$
$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=2-\frac{1}{a_{n+1}}$
$\because a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$,$a_3=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>1$,
又$\because n\geqslant 2$,$a_{n+1}>a_n$,$\therefore a_{n+1}\geqslant a_3>1$,$\therefore 1<2-\frac{1}{a_{n+1}}<2$,
$\therefore \frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}<2$.

第 34 天 数系的扩充与复数引入

1. $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ 2. $-2+\mathrm{i}$ 3. -1 4. 二 5. $-\mathrm{i}$ 6. $-\mathrm{i}$

7. $-1,1$ 8. 7 9. $[\sqrt{2},+\infty)$ 10. $\sqrt{15}$

11. 可以结合复数 z_2 的虚部为 2,设 $z_2=a+2\mathrm{i}$,由已知复数 z_1 满足$(z_1-2)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$,得 $z_1=2-\mathrm{i}$,又已知 $z_1\cdot z_2=(2-\mathrm{i})(a+2\mathrm{i})=(2a+2)+(4-a)\mathrm{i}$ 是实数,则虚部 $4-a=0$,即 $a=4$,即复数 $z_2=4+2\mathrm{i}$.

12. 由题知平行四边形三顶点坐标为 $A(0,1)$,$B(1,0)$,$C(4,2)$,设 D 点的坐标为 $D(x,y)$.
因为$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,得$(-1,1)=(x-4,y-2)$,得$\begin{cases}x-4=-1,\\y-2=1.\end{cases}$得$\begin{cases}x=3,\\y=3,\end{cases}$即 $D(3,3)$.
所以$\overrightarrow{BD}=(2,3)$,则$|BD|=\sqrt{13}$.

13. 解:把 $z=\frac{a-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$代入,得 $\omega=\frac{a-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\left(\frac{a-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}\right)$
$=\frac{a-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\left(\frac{a-\mathrm{i}+\mathrm{i}+1}{1-\mathrm{i}}\right)=\frac{a+1}{2}(1+a\mathrm{i})$.
于是$\frac{a+1}{2}\cdot a-\frac{a+1}{2}=\frac{3}{2}$
$\because a>0$,$\therefore a=2$,$\omega=\frac{3}{2}+3\mathrm{i}$.

14. 解:设 $z=a+b\mathrm{i}$(a、$b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq 0$),
则 $z+\frac{5}{z}=(a+b\mathrm{i})+\frac{5}{a+b\mathrm{i}}=a\left(1+\frac{5}{a^2+b^2}\right)+b\left(1-\frac{5}{a^2+b^2}\right)\mathrm{i}\in\mathbf{R}$.
又 $z+3=a+3+b\mathrm{i}$,依题意,有$\begin{cases}b\left(1-\frac{5}{a^2+b^2}\right)=0,\\a+3=-b.\end{cases}$
又由于 $b\neq 0$,因此$\begin{cases}a^2+b^2=5,\\b=-a-3.\end{cases}$解之得
$\begin{cases}a=-1,\\b=-2\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2,\\b=-1.\end{cases}$

$\therefore z=-1-2\mathrm{i}$ 或 $-2-\mathrm{i}$.

第 35 天　计数原理　排列组合与二项式定理(理科要求)

1. 6　**2.** 5^6　**3.** 84　**4.** 45　**5.** 2 400　**6.** 2 500　**7.** 90
8. $\mathrm{A}_8^8\mathrm{A}_9^2$　**9.** 20　**10.** 62

11. 解:(1) 通项公式为

$$T_{r+1}=\mathrm{C}_n^r x^{\frac{n-r}{3}}\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{-\frac{r}{3}}=\mathrm{C}_n^r\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{\frac{n-2r}{3}},$$

$\therefore$第 6 项为常数项,$r=5$ 时,

有$\frac{n-2r}{3}=0$,即 $n=10$.

(2) 令$\frac{n-2r}{3}=2$,得 $r=\frac{1}{2}(n-6)=2$,

$\therefore$所求的系数为 $\mathrm{C}_{10}^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$.

12. 解题思路:(1)(2)(3)中我们先考虑甲、乙的位置,再考虑其他人;(4)中将甲、乙看成一个整体,与其他人的排列;(5)中应先排其他人再排甲、乙;(6)是一个定序问题,根据对称性求解.

解:(1) 甲的位置固定,则只需排其他六个人,则有 $\mathrm{A}_6^6=720$.

(2) 分两步,先排甲、乙,则有 A_2^2 种排法;再排其他 5 个人,有 A_5^5 种方法,由分步乘法计数原理则有 $\mathrm{A}_2^2\cdot\mathrm{A}_5^5=240$.

(3) 直接法:

分两种情况,①甲站在排尾,则有 A_6^6 种排法;

②甲不站排尾,先排甲、乙,再排其他,则有 $\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{A}_5^5$,综上,则共有 $\mathrm{A}_6^6+\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{A}_5^5=3\ 720$ 种排法.

间接法:总的排法数减去甲站在排头的和乙站在排尾的情况,但是这就把甲站在排头,乙站在排尾的情况减了两次,故后面要加回来,即 $\mathrm{A}_7^7-\mathrm{A}_6^6-\mathrm{A}_6^6+\mathrm{A}_5^5=3\ 720$ 种排法.

(4) 采用"捆绑"法,将甲、乙看成一整体进行排列(甲、乙之间也有排列),故有 $\mathrm{A}_2^2\cdot\mathrm{A}_6^6=1\ 440$ 种排法.

(5) 采用"插空"法,先排其他 5 个人,然后将甲、乙插入到 6 个空格中,故有 $\mathrm{A}_5^5\cdot\mathrm{A}_{26}=3\ 600$ 种排法.

(6) 甲站在乙的左边的排法总数等于乙站在甲的左边的排法总数,故有$\frac{1}{2}\mathrm{A}_7^7=2\ 520$ 种排法.

13. 解题思路:此题不讲究顺序,故采用组合数.

解:(1) $\mathrm{C}_7^3=35$.

(2) $\mathrm{C}_5^1=5$.

(3) $\mathrm{C}_5^3=10$.

(4) $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_5^2=20$.

(5) 直接法:有两种情况:甲、乙两人都当选和甲、乙只有一人当选,则 $\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_5^2=25$;

间接法:甲乙至少有一人当选的对立事件为甲乙都不当选,则 $\mathrm{C}_7^3-\mathrm{C}_5^3=25$.

(6) 直接法:有两种情况:甲、乙两人都不当选和甲、乙只有一人当选,则 $\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_5^2=30$;

间接法:甲乙至多有一人当选的对立事件为甲乙都当选,则 $\mathrm{C}_7^3-\mathrm{C}_5^1=30$.

14. 解:此题的(1)、(2)是一个平均分配问题. 对于(2)可以理解为先分成三堆然后分给甲、乙、丙,则$\frac{\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{A}_3^3}=\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_2^2=90$.(3)(4)(5)是不均分问题,(3)(4)的本质是一样的,因为在分成一堆一本,一堆两本,一堆三本后,三堆分别是甲、乙、丙的,而对(5)是不明确的,还需要再分配.

(1) $\frac{\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{A}_3^3}=15$.

(2) $\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_2^2=90$.

(3) $\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_3^3=60$.

(4) $\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_3^3=60$.

(5) $\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_3^3\cdot\mathrm{A}_3^3=360$.

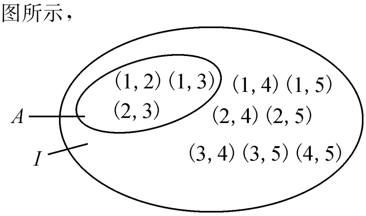
第 36 天　概　　率

1. $\frac{2}{3}$　**2.** $\frac{1}{6}$　**3.** 0.3　**4.** ③　**5.** $\frac{5}{12}$　**6.** $\frac{1}{6}$　**7.** $\frac{1}{4}$
8. $\frac{1}{3}$　**9.** $\frac{3}{55}$　**10.** $\frac{16}{67}$

11. 解析:(1) 分别记白球为 1,2,3 号,黑球为 4,5 号,从中摸出 2 只球,有如下基本事件(摸到 1,2 号球用(1,2)表示):

(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5),共有 10 个基本事件.

(2) 如图所示,



上述 10 个基本事件的可能性相同,且只有 3 个基本事件是摸到 2 只白球(记为事件 A),

即(1,2),(1,3),(2,3),故 $P(A)=\frac{3}{10}$.

故共有 10 个基本事件,摸出 2 只球都是白球的概率为$\frac{3}{10}$.

12. 解析:(1) 由题意可得,$\frac{x}{18}=\frac{2}{36}=\frac{y}{54}$,所以 $x=1,y=3$.

(2) 记从高校 B 抽取的 2 人为 b_1,b_2,从高校 C 抽取的 3 人为 c_1,c_2,c_3,则从高校 B,C 抽取的 5 人中选 2 人作专题发言的基本事件有$(b_1,b_2),(b_1,c_1),(b_1,c_2),(b_1,c_3),(b_2,c_1),(b_2,c_2),(b_2,c_3),(c_1,c_2),(c_1,c_3),(c_2,c_3)$,共 10 种.

设选中的 2 人都来自高校 C 的事件为 X,则 X 包含的基本事件有$(c_1,c_2),(c_1,c_3),(c_2,c_3)$,共 3 种,因此 $P(X)=\frac{3}{10}$.

故选中的 2 人都来自高校 C 的概率为$\frac{3}{10}$.

13. 解析:此问题中将一颗骰子先后抛掷 2 次含有 36 个等可能基本事件.

(1) 记"两数之和为 8"为事件 A,则事件 A 中含有 5 个基本事件,所以 $P(A)=\frac{5}{36}$,

所以两数之和为 8 的概率为$\frac{5}{36}$.

(2) 记"两数之和是 3 的倍数"为事件 B,则事件 B 中含有 12 个基本事件,所以 $P(B)=\frac{1}{3}$;

所以两数之和是 3 的倍数的概率为$\frac{1}{3}$.

(3) 基本事件总数为 36,点(x,y)在圆 $x^2+y^2=25$ 的内部记为事件 D,则 D 包含 13 个事件,所以 $P(D)=\frac{13}{36}$. 所以点(x,y)在圆 $x^2+y^2=25$ 的内部的概率为$\frac{13}{36}$.

14. 解析:(1) 甲、乙各出 1 到 5 根手指头,共有 $5\times5=25$ 种可能结果,和为 6 有 5 种可能结果.

$\therefore P(A)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

(2) B 与 C 不是互斥事件,理由如下:
B 与 C 都包含"甲赢一次,乙赢二次",事件 B 与事件 C 可能同时发生,故不是互斥事件.

(3) 和为偶数有 13 种可能结果,其概率为 $P=\frac{13}{25}>\frac{1}{2}$,故这种游戏规则不公平.

第 37 天　算法、统计

1. 2　**2.** 5　**3.** 30　**4.** $\frac{12}{5}$　**5.** 180　**6.** 72%　**7.** 50
8. 10　**9.** 5　**10.** 26

11. 解:(1) $x=2\,000\times0.19=380$.
(2) 初三共有学生数 $2\,000-(373+377)-(380+370)=500$ 人,初三应抽 $48\times\frac{500}{2\,000}=12$ 人.
(3) 记女生比男生多为事件 A. ∵ $\begin{cases}y+z=500,\\y\geqslant245,\\z\geqslant245,\end{cases}$ ∴ (y,z)的可能取值有$(245,255)$,$(246,254)$,$(247,253)$,…,$(254,246)$,$(255,245)$,共有 11 组,其中女生比男生多,即 $y>z$ 的有 5 组,则 $P(A)=\frac{5}{11}$.

12. 解:(1) 用每组中的平均值作为每组中的样本数据,直接算得平均成绩为 103.4.
(2) 样本中成绩在 70~80 之间有 2 人,设其编号为①②,样本中成绩在 80~90 之间有 4 人,设其编号为③④⑤⑥,从上述 6 人中任取 2 人的所有选取可能为:
①②,①③,①④,①⑤,①⑥;②③,②④,②⑤,②⑥;③④,③⑤,③⑥;④⑤,④⑥;⑤⑥.
故从样本中成绩在 70~90 之间任选 2 人所有可能结果数为 15,至少有 1 人成绩在 70~80 之间可能结果数为 9,因此,所求概率为 $P_2=0.6$.

13. 解:(1) 工厂总数为 $18+27+18=63$,样本容量与总体中的个体数比为$\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$,所以从 A,B,C 三个区中应分别抽取的工厂个数为 2,3,2.
(2) 设 A_1,A_2为在 A 区中抽得的 2 个工厂,B_1,B_2,B_3为在 B 区中抽得的 3 个工厂,C_1,C_2为在 C 区中抽得的 2 个工厂. 在这 7 个工厂中随机抽取 2 个,全部可能的结果有(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_1,C_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1),(A_2,C_2),(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_1,C_1),(B_1,C_2),(B_2,B_3),(B_2,C_1),(B_2,C_2),(B_3,C_1),(B_3,C_2),(C_1,C_2),共有 21 种.
随机地抽取的 2 个工厂至少有 1 个来自 A 区的结果(记为事件 X)有(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_1,C_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1),(A_2,C_2),共有 11 种.
所以这 2 个工厂中至少有 1 个来自 A 区的概率为 $P(X)=\frac{11}{21}$.

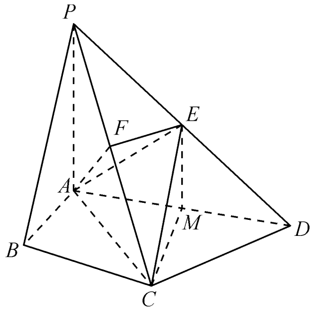
14. 解:(1) $P=\frac{n}{m}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$,∴ 某同学被抽到的概率为$\frac{1}{15}$,
设有 x 名男同学,则$\frac{45}{60}=\frac{x}{4}$,∴ $x=3$,∴ 男、女同学的人数分别为 3,1.
(2) 把 3 名男同学和 1 名女同学记为 a_1,a_2,a_3,b,则选取两名同学的基本事件有:(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,b),(a_2,a_1),(a_2,a_3),(a_2,b),(a_3,a_1),(a_3,a_2),(a_3,b),(b,a_1),(b,a_2),(b,a_3)共 12 种,其中有一名女同学的有 6 种,
∴ 选出的两名同学中恰有一名女同学的概率为 $P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.
(3) $\overline{x}_1=\frac{68+70+71+72+74}{5}=71$,
$\overline{x}_2=\frac{69+70+70+72+74}{5}=71$,
$s_1^2=\frac{(68-71)^2+\cdots+(74-71)^2}{5}=4$,
$s_2^2=\frac{(69-71)^2+\cdots+(74-71)^2}{5}=3.2$.
∴ 第二次做实验的同学的实验更稳定.

第 38 天　综合测试(1)

1. $\frac{8}{3}$　**2.** 2　**3.** $\{-1,0,1,2\}$　**4.** $2+\sqrt{2}$　**5.** $\frac{1}{49}$　**6.** 810
7. 若点 $P_0(x_0,y_0)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$外,过点 P_0 作该双曲线的两条切线的切点分别为 P_1,P_2,则切点弦 P_1P_2 所在直线的方程为$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$　**8.** ②　**9.** $(-3,3)$　**10.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　**11.** $f(x)=\frac{2x-6}{x^2+3}$　**12.** $3\sqrt{3}$　**13.** $n=5$.

14. 解析:(1) 因为$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$,所以$\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})=0$,又$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$,　所以$\overrightarrow{CA}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$,所以$-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})=0$,所以$\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2=0$,
所以$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$,即$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$,故$\triangle ABC$ 为等腰三角形.
(2) ∵ $\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{t}$,∴ $2\sin C\left(2\cos^2\frac{C}{2}-1\right)=-\sqrt{3}\cos 2C$,
∴$\sin 2C=-\sqrt{3}\cos 2C$,即
$\tan 2C=-\sqrt{3}$,∵C 为锐角,∴$2C\in(0,\pi)$,∴$2C=\frac{2\pi}{3}$,
∴$C=\frac{\pi}{3}$.
∴$A=\frac{2\pi}{3}-B$,
∴ $\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)=\sin\left[\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)$.
又 $\sin A=\frac{1}{3}$,且 A 为锐角,∴$\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

15. 解析:(1) 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AB=1$,$\angle BAC=60°$,
∴$BC=\sqrt{3}$,$AC=2$. 取 PC 中点 F,连 AF,PF,则
∵$PA=AC=2$,∴$PC\perp AF$.
∵$PA\perp$平面 $ABCD$,$CD\subset$平面 $ABCD$,
∴$PA\perp CD$,又$\angle ACD=90°$,即 $CD\perp AC$,
∴$CD\perp$平面 PAC,∴$CD\perp PC$,
∴$EF\perp PC$.
∴$PC\perp$平面 AEF.
∴$PC\perp AE$.
(2) 取 AD 中点 M,连接 EM,∵E 为 PD 中点,∴$EM\parallel PA$. ∵$EM\not\subset$平面 PAB,$PA\subset$平面 PAB,
∴$EM\parallel$平面 PAB.



在 Rt△ACD 中，$\angle CAD=60^\circ$，$AC=AM=2$，
∴$\angle ACM=60^\circ$．而$\angle BAC=60^\circ$，∴$MC// AB$.
∵$MC\not\subset$平面 PAB，$AB\subset$平面 PAB，
∴$MC//$平面 PAB.
∵$EM\cap MC=M$，∴平面 $EMC//$平面 PAB.
∵$EC\subset$平面 EMC，∴$EC//$平面 PAB.
证法二：延长 DC、AB，设它们交于点 N，连 PN.
∵$\angle NAC=\angle DAC=60^\circ$，$AC\perp CD$，∴$C$ 为 ND 的中点.
∵E 为 PD 中点，∴$EC// PN$.
∵$EC\not\subset$平面 PAB，$PN\subset$平面 PAB，∴$EC//$平面 PAB.

(3) 由(1)知 $AC=2$，$EF=\frac{1}{2}CD$，且 $EF\perp$平面 PAC.

在 Rt△ACD 中，$AC=2$，$\angle CAD=60^\circ$，∴$CD=2\sqrt{3}$，得 $EF=\sqrt{3}$.

则 $V=V_{E-PAC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

16. 解：(1) $a_{15}=b_7$.
证明如下：设 $a_1=b_1=a$，则 $a\neq0$，且 $a+2d=aq^2$， (1)
$a+6d=aq^4$， (2)
由(1)，(2)得：$2a=a(3q^2-q^4)$，从而 $q^4-3q^2+2=0$，
∴$q^2=2$ 或 $q^2=1$．(∵$q>0$，∴$q=1$，此时 $d=0$，不可，舍之)∴$q^2=2$．代入(1)得 $a=2d$.
$a_{15}=a_1+14d=8a$，$b_7=aq^6=8a$，因此，$a_{15}=b_7$.
(2) 假设存在正整数 m，n，使得 $a_n=b_m$，即 $a+(n-1)d=aq^{m-1}$，
由(1)可知：$q^2=2$，$a=2d$，∴$2d+(n-1)d=2dq^{m-1}$，∴$n+1=2q^{m-1}$，
∴$(n+1)^2=4(q^2)^{m-1}=4\times2^{m-1}=2^{m+1}$，
即存在正整数 m，n，使得 $a_n=b_m$，m，n 之间所满足的关系式为$(n+1)^2=2^{m+1}$，
$m,n\in\mathbf{N}_+$.
事实上，当$(n+1)^2=2^{m+1}$，$m,n\in\mathbf{N}_+$时，有 $a_n=a+(n-1)d=2d+(n-1)d$
$=(n+1)d=2^{\frac{m+1}{2}}\cdot d=2^{\frac{m-1}{2}}\cdot 2d=(q^2)^{\frac{m-1}{2}}\cdot a=aq^{m-1}=b_m$．故知结论成立.

17. 解析：(1) 由题设可得 $2a=4$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=2$，$c=\sqrt{3}$，∴$b=1$.

∴椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 设 $P(x_0,y_0)$，则$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$．∵$HP=PQ$，

∴$Q(x_0,2y_0)$.
∴$OQ=\sqrt{x_0^2+(2y_0^2)}=2$.
∴Q 点在以 O 为圆心，2 为半径的的圆上．即 Q 点在以 AB 为直径的圆 O 上.

(3) 设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$，则 $Q(x_0,2y_0)$，且$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$．又 $A(-2,0)$，∴直线 AQ 的方程为 $y=\frac{2y_0}{x_0+2}(x+2)$．令 $x=2$，得 $M\left(2,\frac{8y_0}{x_0+2}\right)$．又 $B(2,0)$，N 为 MB 的中点，∴$N\left(2,\frac{4y_0}{x_0+2}\right)$.

∴$\overrightarrow{OQ}=(x_0,2y_0)$，$\overrightarrow{NQ}=\left(x_0-2,\frac{2x_0y_0}{x_0+2}\right)$.

∴$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{NQ}=x_0(x_0-2)+2y_0\cdot\frac{2x_0y_0}{x_0+2}=x_0(x_0-2)+\frac{4x_0y_0^2}{x_0+2}=x_0(x_0-2)+\frac{x_0(4-x_0^2)}{x_0+2}=x_0(x_0-2)+x_0(2-x_0)=0$．∴$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{NQ}$.
∴直线 QN 与圆 O 相切.

18. 解析：(1) 设将矩形纸片的右下角折起后，顶点 B 落在边 AD 上的 B' 处，则$\angle B'NM=\theta$，$\angle B'MA=2\theta$，从而有 $NB=l\cos\theta$，$MB=MB'=l\sin\theta$，$AM=MB'\cos2\theta=l\sin\theta\cos2\theta$.
∵$AM+MB=6$，∴$l\sin\theta\cos2\theta+l\sin\theta=6$，得
$l=\frac{6}{\sin\theta(\cos2\theta+1)}=\frac{3}{\sin\theta(1-\sin^2\theta)}=\frac{3}{t-t^3}$，

∵$l\cos\theta\leqslant12$，$l\sin\theta\leqslant6$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，∴$\frac{\pi}{12}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，从而有$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12}\leqslant t\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴$l=f(t)=\frac{3}{t-t^3}$，定义域为$\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

(2) $l=f(t)=\frac{3}{t-t^3}$，$t\in\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$．令 $z=t-t^3>0$，当 $t\in\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$时，

$z=t-t^3$ 是增函数，从而 $l=f(t)=\frac{3}{t-t^3}$为减函数；当 $t\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$时，$z=t-t^3$ 是减函数，从而 $l=f(t)=\frac{3}{t-t^3}$为增函数.

证明可以用定义方法或导数方法，这里从略.

(3) 由(2)知，当 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，MN 长度 $l=f(t)=\frac{3}{t-t^3}$取得最小值$\frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm.

19. 解析：(1) $f'(x)=\ln x+1$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

① $0<t<t+2<\frac{1}{e}$，t 无解；

② $0<t<\frac{1}{e}<t+2$，即 $0<t<\frac{1}{e}$时，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$；

③ $\frac{1}{e}\leqslant t<t+2$，即 $t\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)$在$[t,t+2]$上单调递增，$f(x)_{\min}=f(t)=t\ln t$；

所以 $f(x)_{\min}=\begin{cases}-\frac{1}{e}, & 0<t<\frac{1}{e}\\ t\ln t, & t\geqslant\frac{1}{e}\end{cases}$.

(2) $2x\ln x\geqslant-x^2+ax-3$，则 $a\leqslant2\ln x+x+\frac{3}{x}$，

设 $h(x)=2\ln x+x+\frac{3}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$，$x\in(0,1)$，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，$x\in(1,+\infty)$，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，所以 $h(x)_{\min}=$

$h(1)=4$.

因为对一切 $x\in(0,+\infty)$,$2f(x)\geqslant g(x)$恒成立,所以 $a\leqslant h(x)_{\min}=4$.

(3) 问题等价于证明 $x\ln x>\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}(x\in(0,+\infty))$,由(1)可知 $f(x)=x\ln x(x\in(0,+\infty))$的最小值是$-\frac{1}{e}$,当且仅当 $x=\frac{1}{e}$时取到.

设 $m(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}(x\in(0,+\infty))$,则 $m'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,

易得 $m(x)_{\max}=m(1)=-\frac{1}{e}$,当且仅当 $x=1$ 时取到,

从而对一切 $x\in(0,+\infty)$,都有 $\ln x>\frac{1}{e^x}-\frac{2}{ex}$成立.

第 39 天　综合测试(2)

1. $\{x|2<x\leqslant 3\}$　**2.** $b>\frac{3}{4}$ 或 $b<0$　**3.** $-\sqrt{3}$　**4.** 2

5. $2\sqrt{3}$　**6.** $\left[-\frac{3}{2},3\right]$　**7.** ①③　**8.** $4+2\sqrt{2}$　**9.** 6

10. 2 010　**11.** 4　**12.** $\frac{3}{2}\pi$　**13.** $2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}$　**14.** $a=2$ 或 $a\leqslant 0$

15. 解:(1) $f(x)=p\cdot q=(\sin x,\sqrt{3}\cos x)\cdot(\cos x,\cos x)=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{3}\cdot\frac{1\cos 2x}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore f(x)$的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) $\because a$、b、c 成等比数列,$\therefore b^2=ac$,又 $c^2+ac-a^2=bc$.

$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{ac+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$.

又$\because 0<A<\pi$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. $f(A)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. (1) 证明:因为 $BCFE$ 是菱形,所以 $BF\perp EC$.
又 $BF\perp AE$,所以 $BF\perp$平面 AEC.
所以 $BF\perp AO$.
因为 $AE=AB=AC$,$OE=OC$,所以 $AO\perp EC$.
所以 $AO\perp$平面 $BCFE$.
(2) 证明:因为 $AO\perp$平面 $BCFE$,所以 $AO\perp OE$,$AO\perp OB$.
又因为 $AE=AB$,所以 $OE=OB$,
所以 $EC=BF$.
所以四边形 $BCFE$ 为正方形.

17. 解:(1) ① 因为 $ON=\sqrt{3-x^2}$,$OM=\frac{\sqrt{3}}{3}x$,所以 $MN=\sqrt{3-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}x$,

所以 $y=x\left(\sqrt{3-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)$,$x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

② 因为 $PN=\sqrt{3}\sin\theta$,$ON=\sqrt{3}\cos\theta$,$OM=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}\sin\theta=\sin\theta$,

所以 $MN=ON-OM=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$

所以 $y=\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)$,

即 $y=3\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin^2\theta\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

(2) 选择 $y=3\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin^2\theta=\sqrt{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\because\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,$\therefore 2\theta+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.

所以 $y_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. 解:(1) $M(2t,t^2)$,以 M 为圆心、BM 为半径的圆方程为$(x-2t)^2+(y-t^2)^2=t^4+4$,

其交 x 轴的弦 $DE=2\sqrt{t^4+4-t^4}=4$,$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}DE\cdot(2t^2-1)=14$,$\therefore t=\pm 2$,

$\odot M$ 的方程为$(x\pm 4)^2+(y-4)^2=25$;

(2) $\because MA=\sqrt{(2t)^2+(t^2-1)^2}=t^2+1$,$y_M=t^2$,

$\therefore$存在一条平行于 x 轴的定直线 $y=-1$ 与$\odot M$ 相切;

(3) 在$\triangle BDE$ 中,设$\angle DEB=\theta$,$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BD\cdot BE\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$,$\therefore BD\cdot BE=\frac{8}{\sin\theta}$;$BD^2+BE^2-16=2\times\frac{8}{\sin\theta}\times\cos\theta$,

$\therefore BD^2+BE^2=\frac{16}{\sin\theta}\cos\theta+16$,

$\therefore\frac{BD}{BE}+\frac{BE}{BD}=\frac{BD^2+BE^2}{BD\cdot BE}=2\sin\theta+2\cos\theta$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,

故当 $\theta=\frac{\pi}{4}$时,$\frac{BD}{BE}+\frac{BE}{BD}$的最大值为 $2\sqrt{2}$.

19. 解:(1) $\because T_n=1-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}$,$(n\geqslant 2)$,

$\therefore T_n=1-\frac{T_n}{T_{n-1}}$,$(n\geqslant 2)$ $\therefore 1=\frac{1}{T_n}-\frac{1}{T_{n-1}}$,$(n\geqslant 2)$,

$\because b_n=\frac{1}{T_n}$,　$\therefore b_n-b_{n-1}=1$,$(n\geqslant 2)$

$\because T_n=1-a_n$,$\therefore T_1=1-a_1=1-T_1$,$\therefore T_1=\frac{1}{2}$,$\therefore b_1=\frac{1}{T_1}=2$,

$\therefore$数列$\{b_n\}$是以 2 为首项,以 1 为公差的等差数列,

$\therefore b_n=2+(n-1)=n+1$,$\therefore T_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n+1}$,

$\therefore a_n=1-T_n=1-\frac{1}{n+1}$ (2) $S_n=T_1^2+T_2^2+\cdots+T_n^2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}$,

$\because\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$

$=a_{n+1}-\frac{1}{2}$,$\therefore a_{n+1}-\frac{1}{2}<S_n$

当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=a_n-\frac{1}{4}$,

当 $n=1$ 时,$S_1=T_1^2=\frac{1}{4}=a_1-\frac{1}{4}$,$\therefore S_n\leqslant a_n-\frac{1}{4}$.

20. 解:(1) 当 $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$时,

由定义知:x 与 0 距离最近,$f(x)=|x|$,$x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

当 $x\in\left[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$时，
由定义知：k 为与 x 最近的一个整数，故 $f(x)=|x-k|$，$x\in\left[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2) $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}$，$f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}$，判断 $f(x)$是偶函数.
对任何 $x\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$都存在，且存在 $k\in\mathbf{Z}$，满足 $k-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant k+\frac{1}{2}$，$f(x)=|x-k|$. 由 $k-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant k+\frac{1}{2}$，可以得出 $-k-\frac{1}{2}\leqslant -x\leqslant -k+\frac{1}{2}(k\in\mathbf{Z})$，
即 $-x\in\left[-k-\frac{1}{2},-k+\frac{1}{2}\right](-k\in\mathbf{Z})$，
由(1)的结论，$f(-x)=|-x-(-k)|=|k-x|=|x-k|=f(x)$，即 $f(x)$是偶函数.

第 40 天　矩阵与变换(理科要求)

1. (1)(2)(3)　**2.** (2)(3)(4)　**3.** -3

4. $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$　**5.** $\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 6\end{bmatrix}$　**6.** 1　**7.** $\begin{bmatrix}15\\ 5\end{bmatrix}$

8. $-\frac{33}{4}$　**9.** $\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$　**10.** $x^2+y^2=1$.

11. 解：设 $P(x,y)$是圆 C：$x^2+y^2=4$ 上的任一点，$P'(x',y')$是 $P(x,y)$在矩阵 A 对应变换作用下新曲线上的对应点，
则 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\ y\end{bmatrix}$，
即 $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=y,\end{cases}$所以 $\begin{cases}x=\frac{x'}{2},\\ y=y'.\end{cases}$
将 $\begin{cases}x=\frac{x'}{2},\\ y=y',\end{cases}$代入 $x^2+y^2=4$，
得 $\frac{x'^2}{4}+y'^2=4$，
$\therefore$方程 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 表示的曲线是焦点为$(\pm2\sqrt{3},0)$，长轴为 8 的椭圆.

12. 设 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，由题知 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. 即 $\begin{cases}a-3b=-1,\\ c-3d=3,\\ a+b=3,\\ c+d=3,\end{cases}$ 解之得：$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=3,\\ d=0,\end{cases}$ 所以 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$.

13. (1) 由 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix}$，得 $a+1=-3\Rightarrow a=-4$.
(2) 由(1)知 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$，则矩阵 A 的特征多项式为 $f(x)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ 4 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3$
令 $f(\lambda)=0$，得矩阵 A 的特征值为-1 或 3. 当 $\lambda=-1$ 时二元一次方程 $\begin{cases}(\lambda-1)x+y=0\\ 4x+(\lambda-1)y=0\end{cases}\Rightarrow y=2x$，$\therefore$矩阵 A 的属于特征值-1 的一个特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$. 当 $\lambda=3$ 时，二元一次方程 $\begin{cases}(\lambda-1)x+y=0\\ 4x+(\lambda-1)y=0\end{cases}\Rightarrow 2x+y=0$.
$\therefore$矩阵 A 的属于特征值 3 的一个特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$.

14. (1) $A^2=\begin{bmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}1 & 3a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；
(2) $A^n=\begin{bmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{bmatrix}(n\in\mathbf{N}^*)$；
(3) 设 A^n的特征值为 λ，则由 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -na\\ 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=0$，得$(\lambda-1)^2=0$，所以 $\lambda=1$，它是与 n 无关的常数.

第 41 天　坐标系与参数方程(理科要求)

1. 2　**2.** $2\sqrt{2}$　**3.** 2　**4.** -6　**5.** $\sqrt{14}$　**6.** $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$

7. $(x-1)^2+(x-1)^2=2$　**8.** 7　**9.** $2b$

10. $\rho=6\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

11. 把 $\begin{cases}x=1+4t\\ y=-1-3t\end{cases}$化为普通方程为 $4x+3y-1=0$，把 $\rho=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$化为直角坐标系中的方程为 $x^2+y^2-x+y=0$，$\therefore$ 圆心到直线的距离为 $\frac{1}{10}$，$\therefore$ 弦长为 $2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{100}}=\frac{7}{5}$.

12. 因为 $x^2=t+\frac{1}{t}-2$，所以 $x^2+2=t+\frac{1}{t}=\frac{y}{3}$，故曲线 C 的普通方程为：$3x^2-y+6=0$.

13. 因椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)，故可设动点 P 的参数方程为$(\sqrt{3}\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $0\leqslant\theta<2\pi$. 因此，$S=x+y=\sqrt{3}\cos\theta=\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，所以，当 $\theta=\frac{\pi}{6}$时，S 取得最大值 2.

14. 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=4-2t,\\ y=t-2\end{cases}$($t$ 为参数)，故直线 l 的普通方程为 $x+2y=0$. 因为 p 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上任意点，故可设 $P(2\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $\theta\in\mathbf{R}$. 因此点 P 到直线 l 的距离是 $d=\frac{|2\cos\theta+2\sin\theta|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{2}\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sqrt{5}}$，所以当 $\theta=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，d 取得最大值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.